Commentaires du DS6
Continuité-dérivabilité, suites, polynômes

Un DS avec des questions faisant appel à davantage d'autonomie et un peu moins de questions très faciles mais contenant malgré tout une part non négligeable de classiques. La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{45}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P0	P1	P2	P3	Total	Note finale
Moyenne	-1,8	2,28	3,68	6,96	5,88	17,27	9,05
Sur		4	20	20	50	94	20

Répartition	< 6	$[6; 8[$	$[8; 10[$	$[10; 12[$	$\geqslant 12$
Effectif	6	12	4	4	10

Partie 1 : Préliminaire

On appelle cotangente, notée cotan la fonction définie lorsque c'est possible par $\mathrm{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de cotan.

   Facile et bien réussie. N'oubliez pas de présenter votre variable. Deux ou trois m'inquiètent à penser que le cosinus ou le sinus ne sont définies que sur $[0; 2\pi]$. Attention dans l'ensemble à bien prendre $k \in \mathbb{Z}$ et non juste dans $\mathbb{N}$.

2. Justifier que les fonctions cotan et $\frac{1}{\tan}$ ne sont pas égales partout.

   Bien dans l'ensemble. Inutile de trop s'étendre ou de faire quelque chose de trop général, n'hésitez pas au contraire à être précis et à donner un exemple concret. Il suffit de considérer le point $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = 0$ par exemple.

3. Montrer que cotan définit une bijection sur $]0; \pi[$ dans un ensemble que l'on précisera et tracer l'allure de son graphe sur $]0; \pi[$.

   Pas mal de bonnes réponses, mais il est incompréhensible que tout le monde n'est pas tous les points. Vous êtes encore bien trop nombreux à ne pas donner TOUTES les hypothèses du théorème. Ne parachutez pas non plus l'ensemble image, qui doit être justifié proprement.

Problème I - Continuité-dérivabilité

Partie 1 : Etude d'une fonction

Une partie très décevante (moyenne est de 3/10) alors qu'elle contient beaucoup de questions classiques voire élémentaires de ce chapitre.

On définit

$$\varphi : \begin{array}{ccl}]-\pi; \pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \mathrm{cotan}(x)\arctan(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que φ est continue sur $]-\pi; \pi[$.

   Quelques bonnes réponses mais bien trop peu globalement. N'oubliez pas de préciser que φ est continue sur $]-\pi; \pi[\setminus \{0\}$ en tant que... Ensuite on étudie en 0 et enfin on conclut sur le global. Vous allez très souvent trop vite dans votre rédaction.

2. Préciser la parité de φ.

   Un demi-point en moins pour tous ceux qui oubliait de préciser que $]-\pi;\pi[$ est bien centré en 0. D'autre part, n'oubliez pas que l'expression en $\operatorname{cotan}(x)\arctan(x)$ n'est pas valide en 0.

3. Montrer que pour tout $x \in]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} - \arctan(x)\right)$.

   On n'oublie pas de parler de la dérivabilité. Question bien réussie dans l'ensemble.

4. En déduire un équivalent simple de $\varphi'(x)$ quand x tend vers 0, $x \neq 0$.

   Aucune bonne réponse... On fait un petit DL et on conclut. Il va être vital de bien bien retravailler la notion d'équivalents. Quelques-uns m'ont fait une somme d'équivalents!!!!!!!!!!!!! D'autres m'ont dit que c'était interdit puis le font... Alors là je ne peux plus rien...

5. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ et préciser l'équation de sa tangente en 0.

   Un grand classique sur le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$... Très très peu de bonnes réponses.

6. Tracer l'allure du graphe de φ sur $]-\pi;\pi[$.

   Pas très souvent traitée ni réussie.

Partie 2 : Une fonction divergeant aux bords d'un intervalle borné

Une partie plus dure et plus théorique... Trop apparemment, très peu s'en sont sortie.
Soit f une fonction dérivable sur $]-\pi;\pi[$ telle que $\lim\limits_{x\to-\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 1$.

7. Montrer qu'il existe $(a,b) \in]-\pi;0[\times]0;\pi[$, tel que $\forall x \in]-\pi;a] \cup [b;\pi[$, $f(x) \leqslant 0$.

   Il fallait juste appliquer la définition de la limite. Ce que deux ou trois seulement ont vu. Beaucoup me parle du théorème des valeurs intermédiaires et de $f(a) = f(b) = 0$ mais ce n'était pas la question et ce n'est pas clair du tout que si $f(a) = 0$ alors pour tout $x \leqslant a$, $f(x) \leqslant f(a)$ ni même l'existence d'un « dernier a tel que $f(a) = 0$ ». A bien reprendre.

8. Montrer que $[0;1] \subseteq f(]-\pi;\pi[)$.

   Et ça mouline et ça mouline. Oui il y avait du théorème des valeurs intermédiaires ici mais pratiquement personne n'a su l'utiliser proprement.

9. Montrer que f admet un maximum sur $]-\pi;\pi[$.

   Le théorème des bornes atteintes n'est pas su. Je ne peux pas apprendre votre cours à votre place.

10. On suppose que f' est bornée sur $[0;\pi[$: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [0;\pi[$, $|f'(x)| \leqslant M$.

    (a) Montrer que f est M-lipschitzienne sur $[0;\pi[$.
    Quelques bonnes réponses mais bien trop peu vu que c'était une question de l'interrogation d'entrainement.

    (b) Conclure à une contradiction, que peut-on en déduire ?
    Pas de réponse complète il me semble, pourtant pas si dure, à reprendre.

Problème II - Suites numériques

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : Une suite récurrente

On pose considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Représenter le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphique en annexe **à rendre avec la copie**.

   Bien !

2. Dresser le tableau de variation de $h : x \mapsto \arctan(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

   On n'oublie pas la dérivabilité ! On justifie aussi les limites aux bornes AVANT le tableau de variation.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   Il y avait plus simple que le corrigé (mais moins utile ensuite). On pouvait remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. Attention cependant vous l'avez souvent très mal rédigé et vous avez notamment oublié u_0. Certains me font une belle récurrence pour me montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$, ce qui était plus efficace pour la suite. Je rappelle que dire « u_n est borné » n'a aucun intérêt. Un réel fixé est toujours borné.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Plusieurs bonnes réponses.

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

   Pas de problème pour le théorème de convergence monotone. Mais des difficultés pour trouver la limite où j'ai eu beaucoup de parachutages.

Partie 2 : Une suite implicite

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arctan(x)}{x^n} \end{array}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
   (a) Déterminer le signe de $g_n : x \mapsto x - n\left(1 + x^2\right)\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Mitigé, le signe de la dérivée n'est pas toujours proprement justifié.
   (b) En déduire le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Des gros parachutages !! De belles réponses également. Même remarque, les limites sont d'une part à justifier et d'autre part à écrire AVANT le tableau de variation.

7. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique $x_n \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$ tel que $f_n(x_n) = 1$.

   Trop peu de réponses propres. Dès qu'il faut utiliser un théorème, vous oubliez la moitié des hypothèses ! Des lacunes aussi sur $\arctan(1)$ et $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ qui sont pourtant à connaitre.

8. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est monotone.

   Une poignée de belles réponses mais aussi plusieurs arnaques sur $f_{n+1}(x)$ par rapport à $f_n(x)$. Justifiez bien chaque étape pour ne pas faire d'erreur. Il fallait notamment justifier que x_n et x_{n+1} sont bien dans $[0;1]$ pour que cela fonctionne.

9. En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge et déterminer sa limite.

   Pas de bonnes réponses, question plus dure mais dont le type a déjà été traité en classe.

Problème III - Polynômes

Un début facile et assez abordé mais dès que l'on rentre dans le vif des polynômes plus grand monde n'a eu le temps ou le courage de s'y confronter. Bien retravailler ces questions un peu plus élaborées car elles présentent des notions qui sont importants à assimiler.

L'objectif de ce problème est de calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ en utilisant un résultat obtenu grâce à des polynômes.

Partie 1 : Convergence de la série

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

   Facile et bien réussie. Depuis que nous avons fait les séries je dirai même basique.

2. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

   Quelques erreurs de calcul dans la réduction au même dénominateur mais plutôt bien réussie. Plusieurs ne prennent pas le dénominateur commun le plus petit.

3. Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

   Un nombre satisfaisant d'entre vous voient bien l'adjacence. Certains essayent de s'en sortir sans succès avec de la convergence monotone.

Partie 2 : Une équation polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à déterminer tous les polynômes $R_n \in \mathbb{C}[X]$ solutions de l'équation

$$(E_n) \qquad (X-1)\,R_n' = nR_n.$$

On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des solutions de (E_n) dans $\mathbb{C}[X]$.

4. Montrer que $\mathscr{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

   Bien et engageant pour ce chapitre.

5. Préciser $\mathscr{S}_0$.

   Beaucoup d'erreurs pourtant la question est basique. Je rappelle que $X=1$ est impossible le polynôme constant égal à 1 n'est pas égal au polynôme X.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $R_n \in \mathscr{S}_n$. On suppose R_n non constant.

6. Quel théorème garantit l'existence d'une racine $a \in \mathbb{C}$ de R_n ?

   Le nom du théorème était attendu, paraphraser le fait que R_n possède une racine ne sert à rien.

   On fixe $a \in \mathbb{C}$ une racine de R_n. On note $p \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.

7. Montrer que
   $$nR_n^{(p-1)} = (X-1)\,R_n^{(p)} + (p-1)\,R_n^{(p-1)}.$$

   Pas très difficile mais très peu réussie. A bien reprendre !! Plusieurs arnaques malheureusement.

8. En déduire que $a=1$ puis la factorisation de R_n dans $\mathbb{C}$ en fonction de p et d'un coefficient $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

   Trop peu de succès sur la caractérisation de la multiplicité de p avec les dérivées. Pour la factorisation, il fallait la factorisation complète et justifiée !! Notamment bien préciser que seule 1 était racine. Non réussie.

9. Montrer que $p = n$.

   Une ou deux bonnes réponses.

10. En conclure que $\mathscr{S}_n = \mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right)$. *On pensera bien à justifier l'inclusion réciproque.*

    Non réussie. Pas si dure mais nécessitait les questions précédentes.

Partie 3 : Factorisation des Q_n

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on note $\omega_k = \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

11. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Déterminer une relation entre ω_{n-k} et ω_k.

    Trop d'erreurs sur cette simple formule de trigo...

On pose $R_n = (X-1)^n$ et $Q_n = R_n(X+2) - R_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

12. Préciser Q_2, Q_3 et Q_4.

    On demandait naturellement de simplifier en développant les polynômes.

13. Montrer que Q_n est de même parité que $n+1$.

    Non réussie. Pas si dure non plus, à bien reprendre à tête reposée.

14. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.

    Quelques belles réponses.

15. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{-i\,\omega_k \mid k \in [\![1; n-1]\!]\right\}.$$

    Seulement deux bonnes réponses de ce grand classique des complexes... snif.

16. A l'aide de la question 3. des préliminaires montrer que Q_n possède au moins $n-1$ racines distinctes.

    Des éléments mais une rigueur supplémentaire était attendue ici.

17. Préciser la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.

    Pratiquement pas traitée.

18. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En déduire la factorisation de Q_{2m+1} dans $\mathbb{R}[X]$.

    Non traitée.

Partie 4 : Racines de P_n

On considère toujours $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

19. Préciser P_2 et P_3.

    Un chouille de calculs, il fallait détailler chaque coefficient. Plusieurs bonnes réponses.

20. (a) Soit $t \in \mathbb{C}$. Simplifier $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} t^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} t^{2n-2k}$.

    Aucune bonne réponse. A bien comprendre avec le corrigé, ce n'est pas une question négligeable.

    (b) En déduire que

$$Q_{2n+1}(X) = 2P_n\left(X^2\right).$$

    Non traitée.

21. En déduire que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ sont des racines de P_n et qu'il n'y en a pas d'autre.

    Non traitée.

22. Rappeler les deux relations racines-coefficients pour un polynôme scindé quelconque.

    Bien en général.

23. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

    Une seule bonne réponse, sinon non traitée.

Partie 5 : Conséquence, conclusion, consécration

On admet que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$
(ce qui se démontre par une simple étude de fonction).

24. En déduire que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$.

    Question assez facile donc vous devez être rigoureux, plusieurs me massacrent la rédaction.

25. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. En appliquant l'inégalité précédente à $\frac{k\pi}{2n+1}$, en déduire un encadrement de $\frac{1}{k^2}$.

    Il fallait justifier que $\frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ pour appliquer la question précédente. Ensuite pas de difficulté mais peu traitée du fait qu'elle est en fin de sujet.

26. En déduire un encadrement puis un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

    Pas de bonne réponse.

27. Conclure en précisant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

    Idem.