Corrigé du Devoir Surveillé 6
Continuité, dérivabilité, suites numériques, polynômes

Partie 0 : Préliminaire

On appelle cotangente, notée cotan la fonction définie lorsque c'est possible par $\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\text{cotan}(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \not\equiv 0 \ [\pi].$$

Conclusion, le domaine de définition de cotan est donné par

$$\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.}$$

2. La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et s'annule pour tout $x = 0 + k\pi$. Donc la fonction $1/\tan$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Notamment $1/\tan$ tout comme la fonction tan n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ par exemple alors que d'après la question précédente, la fonction cotan l'est. Conclusion,

$$\boxed{\text{les fonctions cotan et } 1/\tan \text{ ne sont pas égales en } \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.}$$

3. La fonction cotan est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad \text{cotan}'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0.$$

Donc notamment pour tout $x \in \,]0;\pi[\, \subseteq \mathscr{D}$, $\text{cotan}'(x) < 0$. Donc la fonction cotan est strictement décroissante sur **l'intervalle** $]0;\pi[$. De plus, cotan est continue sur $]0;\pi[$ car elle l'est sur $\mathscr{D}$. Donc par le théorème de la bijection, cotan définit une bijection de $I = \,]0;\pi[$ dans $J = \text{cotan}\left(]0;\pi[\right)$ et de plus, on sait que

$$J = \text{cotan}\left(]0;\pi[\right) = \left] \lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} \text{cotan}(x); \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \text{cotan}(x) \right[.$$

Or en π^-, cos tend vers -1 et sin vers 0^+. Donc par quotient,

$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} \text{cotan}(x) = -1 \times +\infty = -\infty.$$

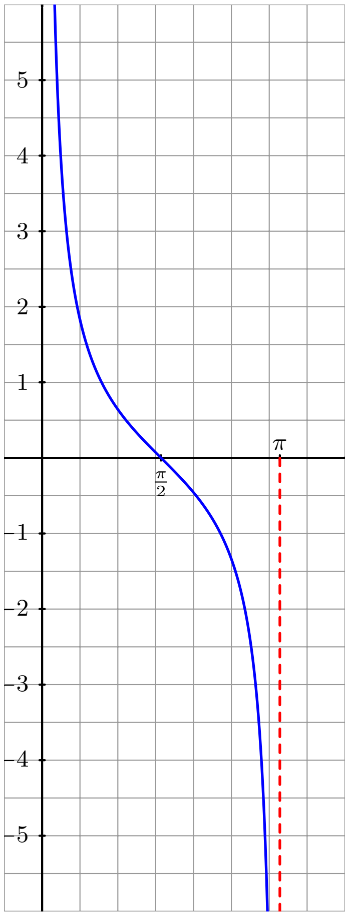
De même en 0^+, cos tend vers 1 et sin vers 0^+ donc par quotient,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \text{cotan}(x) = 1 \times +\infty = +\infty.$$

Donc $J = \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{cotan définit une bijection de }]0;\pi[\text{ dans } \mathbb{R}.}$$

On observe que $\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi, on obtient le graphe suivant :



Problème I - Continuité-dérivabilité

Partie 1 : Etude d'une fonction

On définit

$$\varphi : \begin{array}{rcl}]-\pi;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \operatorname{cotan}(x)\arctan(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. On a vu précédemment que cotan est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\, k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ donc notamment sur $]-\pi;0[\cup]0;\pi[$ et la fonction arctan est bien définie sur $\mathbb{R}$. Donc φ est bien définie sur $]-\pi;0[\cup]0;\pi[$ et en 0 donc sur $]-\pi;\pi[$.

   De plus, cotan est continue sur $\mathscr{D}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc cotan est continue sur $]-\pi;0[\cup]0;\pi[$. La fonction arctan aussi. Donc φ est continue sur $]-\pi;0[\cup]0;\pi[$. Etudions son comportement en 0.

   On a
   $$\forall x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[, \qquad \varphi(x) = \operatorname{cotan}(x)\arctan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\arctan(x).$$

   Or on sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc par produit et quotient (légal pour les équivalents) on a
   $$\varphi(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{1}{x} \times x = 1.$$

   Autrement dit
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi(x) = 1.$$

Or $\varphi(0)=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi(x)=\varphi(0)$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ existe et vaut $1=\varphi(0)$. Donc

la fonction φ est continue en 0.

Or on a vu que φ est continue sur $]-\pi;0[\cup]0;\pi[$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur }]-\pi;\pi[.}$$

2. On note que $]-\pi;\pi[$ est centré en 0. De plus, pour tout $x\in]-\pi;\pi[$, si $x\neq 0$, $-x$ aussi et donc

$$\varphi(-x)=\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}\arctan(-x)=\frac{\cos(x)}{-\sin(x)}(-\arctan(x))=\varphi(x),$$

par imparité de sin et arctan et parité de cos. Si $x=0$, $\varphi(-x)=\varphi(0)=\varphi(x)$. Donc dans tous les cas,

$$\forall x\in]-\pi;\pi[,\qquad \varphi(-x)=\varphi(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est paire.}}$$

3. Les fonctions cos, sin et arctan sont dérivables sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$ et sin ne s'annule pas sur cet ensemble donc φ est dérivable sur cet ensemble et

$$\begin{aligned}\forall x\in]-\pi;\pi[\setminus\{0\},\qquad \varphi'(x)&=\operatorname{cotan}'(x)\arctan(x)+\operatorname{cotan}(x)\arctan'(x)\\ &=\frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\arctan(x)+\operatorname{cotan}(x)\frac{1}{1+x^2}\\ &=-\frac{1}{\sin^2(x)}\arctan(x)+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\frac{1}{1+x^2}\\ &=\frac{1}{\sin^2(x)}\left(-\arctan(x)+\cos(x)\sin(x)\frac{1}{1+x^2}\right) &&\text{car } \sin(x)\neq 0\\ &=\frac{1}{\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(2x)}{2}\frac{1}{1+x^2}-\arctan(x)\right).\end{aligned}$$

Conclusion, on observe bien que

$$\boxed{\forall x\in]-\pi;\pi[\setminus\{0\},\qquad \varphi'(x)=\frac{1}{\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)}-\arctan(x)\right).}$$

4. On sait que $\sin(u)\underset{u\to 0}{=}u-\frac{u^3}{6}+o(u^3)$. Donc en posant $u=2x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, on a

$$\sin(2x)\underset{x\to 0}{=}2x-\frac{8x^3}{6}+o(x^3).$$

Donc

$$\frac{\sin(2x)}{2}\underset{x\to 0}{=}x-\frac{2x^3}{3}+o(x^3).$$

D'autre part, $\frac{1}{1+u}\underset{x\to 0}{=}1-u+o(u)$. Donc en prenant $u=x^2\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, on a également

$$\frac{1}{1+x^2}\underset{x\to 0}{=}1-x^2+o(x^2).$$

Par produit,

$$\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} \underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - x^2 + o\left(x^2\right)\right) \qquad \begin{array}{rlll} \underset{x\to 0}{=} & x & -x^3 & +o\left(x^3\right) \\ & & -\frac{2x^3}{3} & +o\left(x^3\right) \\ & & & +o\left(x^3\right) \end{array}$$

$$\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{5x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Enfin,

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Donc par différence,

$$\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} - \arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{5x^3}{3} + o\left(x^3\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

De là, on en déduit que

$$\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} - \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4x^3}{3}.$$

Inutile de faire le développement limité de $\frac{1}{\sin^2(x)}$. Nous avons directement, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc par passage à la puissance -2,

$$\frac{1}{\sin^2(x)} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Finalement, par produit,

$$\boxed{\varphi'(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{4x^3}{3}\right) = -\frac{4x}{3}.}$$

5. D'après ce qui précède, on sait que φ est dérivable sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$ et par la question précédente,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} -\frac{4x}{3} = 0.$$

De plus, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$ comme produit et quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi,

- φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$.
- φ est continue sur $]-\pi;\pi[$ (par la question 2.).
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x)$ existe et vaut 0.

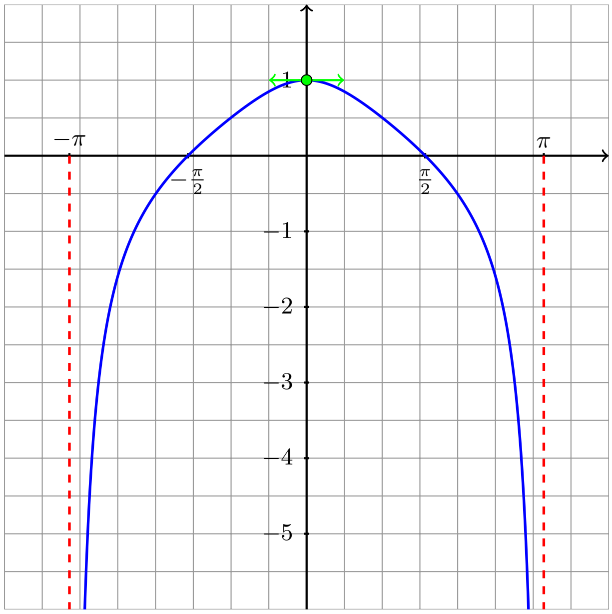
Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que φ est $\mathscr{C}^1$ en 0 et $\varphi'(0) = 0$. Or φ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-\pi;\pi[.}$$

De plus on a $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. Ainsi, φ admet une tangente horizontale en 0 dont l'équation est donnée par

$$\boxed{y = 1.}$$

6. On obtient le graphe suivant



Partie 2 : Une fonction divergeant aux bords d'un intervalle borné

Soit f une fonction dérivable sur $]-\pi;\pi[$ telle que $\lim_{x\to-\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 1$.

7. On sait que $\lim_{x\to-\pi} f(x) = -\infty$ i.e.

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \left]-\pi; -\pi+\eta\right[, \qquad f(x) \leqslant A.$$

En particulier pour $A = 0$, on obtient qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\pi;-\pi+\eta[$, $f(x) \leqslant 0$. Posons $a = \min\left(-\pi+\eta, -1\right)$, alors $a \in]-\pi;0[$ et pour tout $x \in]-\pi;-\pi+\eta[$, on a $x \in]-\pi;a[$ et donc $f(x) \leqslant 0$.

De même, $\lim_{x\to\pi} f(x) = -\infty$ donc pour $A = 0$, il existe $b \in]0;\pi[$ tel que pour tout $x \in]0;\pi[$, $f(x) \leqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\exists\,(a,b) \in \left]-\pi;0\right[\times \left]0;\pi\right[,\ \forall x \in \left]-\pi;a\right[\cup \left]b;\pi\right[, \qquad f(x) \leqslant 0.}$$

8. Montrons que $[0;1] \subseteq f\left(]-\pi;\pi[\right)$. Soit $x \in [0;1]$. Par la question précédente, on a $f(a) \leqslant 0$. Donc

$$f(a) \leqslant 0 \leqslant x \leqslant 1 = f(0).$$

Or la fonction f est dérivable et donc continue sur le segment $[a;0]$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists \alpha \in [a:0], \qquad x = f(\alpha).$$

En particulier,

$$\exists \alpha \in \left]-\pi;\pi\right[, \qquad x = f(\alpha).$$

Par conséquent, $x \in f\left(]-\pi;\pi[\right)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in [0;1]$, on en déduit que

$$\boxed{[0;1] \subseteq f\left(]-\pi;\pi[\right).}$$

9. La fonction f est continue sur $]-\pi;\pi[$ donc sur le segment $[a;b] \subseteq]-\pi;\pi[$. Donc par le théorème des bornes atteintes :

$$\exists x_0 \in [a;b],\ \forall x \in [a;b], \qquad f(x_0) \geqslant f(x).$$

En particulier, puisque $0 \in [a;b]$, $f(x_0) \geqslant f(0) = 1 > 0$. Or on sait que pour tout $x \in]-\pi;a[\cup]b;\pi[$, $f(x) \leqslant 0$ et donc $f(x) \leqslant f(x_0)$. Ainsi

$$\exists x_0 \in [a;b] \subseteq]-\pi;\pi[\,,\ \forall x \in]-\pi;\pi[\,, \qquad f(x) \leqslant f(x_0)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un maximum sur }]-\pi;\pi[.}$$

Et celui-ci est atteint sur $[a;b]$.

10. On suppose que f' est bornée sur $[0;\pi[$: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [0;\pi[$, $|f'(x)| \leqslant M$.

   (a) Soit $(x,y) \in [0;\pi[^2$, $x \neq y$. Alors, puisque la fonction f est dérivable sur $]-\pi;\pi[$, on en déduit que f est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$) dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$). Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in]x;y[\ \text{(ou }]y;x[\text{)}, \qquad f(x) - f(y) = f'(c)\,(x-y)\,.$$

   Donc

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x-y| \leqslant M\,|x-y| \qquad \text{car } c \in]x;y[\subseteq [0;\pi[.$$

   L'inégalité étant encore vraie pour $x = y$, on a

$$\forall (x,y) \in [0;\pi[^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x-y|\,.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } M\text{-lipschitzienne sur } [0;\pi[.}$$

   (b) Soit $x \in [0;\pi[$. Par la question précédente, on a

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 1| \leqslant M\,|x-0| = M\,|x| \leqslant M\pi.$$

   Donc

$$\forall x \in [0;\pi[\,, \qquad f(x) - 1 \geqslant -M\pi \iff f(x) \geqslant 1 - M\pi.$$

   Donc la fonction f est minorée sur $[0;\pi[$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f(x) = -\infty$ ce qui est contradictoire. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f' \text{ n'est pas bornée.}}$$

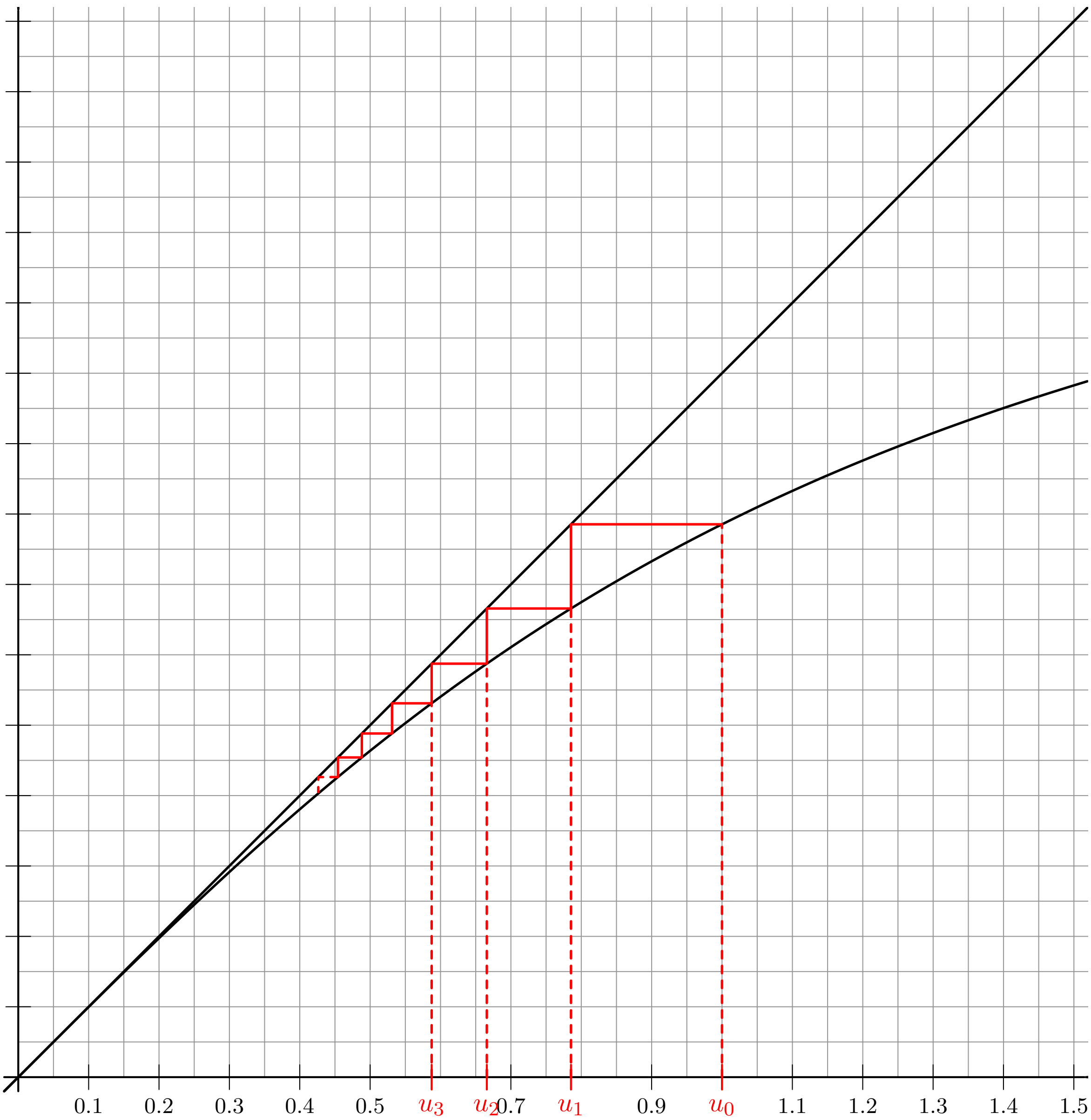
Problème II - Suites numériques

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : Une suite récurrente

On pose considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. On obtient pour les premiers termes le comportement suivant :



2. La fonction h est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions qui le sont. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2}.$$
Donc h' est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$ et h est continue en 0 donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Enfin,
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{2} - \infty = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty.$$
On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h	$+\infty$	0	$-\infty$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \in [0;1]$ ».
Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = 1 \in [0;1]$
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Alors par la croissance de la fonction arctan,
$$0 = \arctan(0) \leqslant \arctan(u_n) = u_{n+1} \leqslant \arctan(1).$$
Puisque $1 > 0$, par la question précédente, on en déduit que $h(1) \leqslant h(0) = 0$ donc $\arctan(1) - 1 \leqslant 0$ i.e. $\arctan(1) \leqslant 1$. Ainsi,
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [0;1].$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par 1 et minorée par 0. Conclusion,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

4. Par la question 2. on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire $\arctan(x) \leqslant x$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ d'après la question précédente. Donc en prenant $x = u_n \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\arctan(u_n) \leqslant u_n \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{n+1} \leqslant u_n.$$
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en conclut que
$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

5. Par ce qui précède, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante. Donc par le théorème de convergence monotone,
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$
Notons ℓ sa limite. La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ en tant que suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part, par continuité de la fonction arctan en ℓ (car elle est continue sur $\mathbb{R}$), par la caractérisation séquentielle de la continuité,
$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(u_n) = \arctan(\ell).$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Donc par unicité de la limite,
$$\arctan(\ell) = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad h(\ell) = 0.$$
Or la fonction h est **strictement** décroissante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = 0$ donc pour tout $x > 0$, $h(x) < 0$ et pour tout $x < 0$, $h(x) > 0$. Ainsi $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (on peut aussi invoquer le théorème de la bijection pour garantir son injectivité). Nécessairement, $\ell = 0$. Conclusion,
$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$$

Partie 2 : Une suite implicite

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arctan(x)}{x^n} \end{array}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

(a) La fonction $g_n : x \mapsto x - n\left(1+x^2\right)\arctan(x)$ est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g_n'(x) = 1 - n\,(2x)\arctan(x) - n.$$

Or $n \geqslant 2$ donc $1 - n < 0$ et de plus pour $x \geqslant 0$, $-2nx\arctan(x) \leqslant 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g_n'(x) < 0.$$

Donc la fonction g_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g_n(0) = 0$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g_n(x) < 0.}$$

(b) La fonction f_n est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_n'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\,x^n} - n\frac{\arctan(x)}{x^{n+1}} = \frac{x - n\left(1+x^2\right)\arctan(x)}{x^{n+1}} = \frac{g_n(x)}{x^n}.$$

Or par la question précédente, pour tout $x > 0$, $g_n(x) < 0$ et $x^n > 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_n'(x) < 0.$$

Donc la fonction f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Or $n \geqslant 2$. Donc $\frac{1}{x^{n-1}} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = +\infty.$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Conclusion,

x	$-\infty$	$+\infty$
f_n	$+\infty$	0

7. Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est continue et par la question précédente strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};1\right]$. De plus,

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\arctan\left(1/\sqrt{3}\right)}{\left(1/\sqrt{3}\right)^n} = 3^{n/2}\frac{\pi}{6} \geqslant 3\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} > 1 \qquad \text{car } n \geqslant 2.$$

Et
$$f_n(1) = \frac{\arctan(1)}{1^n} = \frac{\pi}{4} < 1.$$
Donc $1 \in \left[f_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right); f_n(1)\right]$. Donc par le théorème de la bijection (ou le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) il existe un unique

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \exists! x_n \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right], \qquad f_n(x_n) = 1.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$, on a $x^n \geqslant x^{n+1} > 0$. Donc
$$0 < \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \frac{\arctan(x)}{x^n} \leqslant \frac{\arctan(x)}{x^{n+1}} \qquad \text{car } \arctan(x) > 0.$$
Ainsi,
$$\forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right], \qquad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x).$$
Or par la question précédente, $x_n \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$ donc
$$f_n(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_n).$$
Or $f_n(x_n) = 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Donc
$$f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n).$$
Or par la question 6.b f_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$. Ainsi,
$$x_{n+1} \geqslant x_n.$$
Ceci étant vrai pour $n \geqslant 2$ quelconque. On en conclut que
$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 2} \text{ est croissante.}}$$

9. Par ce qui précède, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée par 1. Donc par le théorème de convergence monotone, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Notons ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a
$$1 = f_n(x_n) = \frac{\arctan(x_n)}{x_n^n} \qquad \Leftrightarrow \qquad \arctan(x_n) = x_n^n.$$
Pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x_n \leqslant 1$. Donc par passage à la limite, $\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \ell \leqslant 1$. Supposons $\ell < 1$. Alors par le théorème de convergence monotone, on sait que $\ell = \sup_{n\geqslant 2} x_n$ donc
$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant x_n \leqslant \ell \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n.$$
Or $\ell \in [0; 1[$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} \ell^n = 0 = \lim_{n\to+\infty} 0.$$
Ainsi, par le théorème d'encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \arctan(x_n) = 0.$$
Or par continuité de la fonction arctan en ℓ et la caractérisation séquentielle de la continuité,
$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(x_n) = \arctan(\ell).$$
Donc par unicité de la limite $\arctan(\ell) = 0 \ \Rightarrow\ \ell = 0$. Or on a vu que $\ell \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$. Contradiction. Donc nécessairement, $\ell = 1$. Conclusion,
$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge vers 1.}}$$

Problème III - Polynômes

L'objectif de ce problème est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ en utilisant un résultat obtenu grâce à des polynômes.

Partie 1 : Convergence de la série

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $T_n=S_n+\frac{1}{n}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{(n+1)^2}>0.$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad S_{n+1}>S_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)}\\&=\frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2}\\&=-\frac{1}{n(n+1)^2}<0.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad T_{n+1}<T_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$T_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{n}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}(T_n-S_n)=0.$$

De plus, on a vu que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ainsi, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Or deux suites adjacentes convergent (et vers la même limite). Conclusion,

$$\boxed{\text{Les suites } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent (et vers la même limite).}}$$

Partie 2 : Une équation polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à déterminer tous les polynômes $R_n \in \mathbb{C}[X]$ solutions de l'équation

$$(E_n) \qquad (X-1)\,R_n' = nR_n.$$

On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des solutions de (E_n) dans $\mathbb{C}[X]$.

4. On note les points suivants

   - $\mathscr{S}_n \subseteq \mathbb{C}[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$, alors $(X-1)\,P' = 0_{\mathbb{C}[X]} = nP$. Donc $0_{\mathbb{C}[X]} \in \mathscr{S}_n$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in \mathscr{S}_n^2$. Dès lors, on sait que

   $$(X-1)\,P' = nP \qquad \text{et} \qquad (X-1)\,Q' = nQ$$

   Posons $R = \lambda\,P + \mu Q$. Alors, $R \in \mathbb{C}[X]$ et

   $$\begin{aligned}
   (X-1)\,R' &= (X-1)\,(\lambda\,P + \mu Q)' \\
   &= (X-1)\left(\lambda\,P' + \mu Q'\right) && \text{par linéarité de la dérivation des polynômes} \\
   &= \lambda\,(X-1)\,P' + \mu\,(X-1)\,Q' \\
   &= \lambda\,nP + \mu nQ && \text{car } P \in \mathscr{S}_n \text{ et } Q \in \mathscr{S}_n \\
   &= n\,(\lambda\,P + \mu Q) = nR.
   \end{aligned}$$

   Donc $R \in \mathscr{S}_n$ et $\mathscr{S}_n$ est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

   $$\boxed{\mathscr{S}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}[X].}$$

5. Si $n = 0$, on a

   $$(E_0) \qquad (X-1)\,R_0' = 0_{\mathbb{C}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad R_0' = 0_{\mathbb{C}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad R_0 \in \mathbb{C}_0[X].$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathbb{C}_0[X].}$$

Soit $R_n \in \mathscr{S}_n$. On suppose R_n non constant.

6. Puisque R_n est non constant,

   $$\boxed{\text{par le théorème de d'Alembert-Gauss, } R_n \text{ admet une racine } a \text{ dans } \mathbb{C}.}$$

   On fixe $a \in \mathbb{C}$ une racine de R_n. On note $p \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.

7. Puisque $R_n \in \mathscr{S}_n$, on a

   $$nR_n = (X-1)\,R_n'.$$

   Donc en dérivant $p-1$ fois cette égalité,

   $$nR_n^{(p-1)} = \left((X-1)\,R_n'\right)^{(p-1)}.$$

   Par la formule de Leibniz,

   $$nR_n^{(p-1)} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (X-1)^{(k)} \left(R_n'\right)^{(p-1-k)}.$$

Or $(X-1)^{(0)} = X+1$, $(X-1)^{(1)} = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, $(X-1)^{(k)} = 0$. Donc si $p \geqslant 2$, $p-1 \geqslant 1$ et alors

$$nR_n^{(p-1)} = \binom{p-1}{0}(X-1)\left(R_n'\right)^{(p-1)} + \binom{p-1}{1}\left(R_n'\right)^{(p-2)} = (X-1)\,R_n^{(p)} + (p-1)\,R_n^{(p-1)}.$$

Si $p=1$, on sait que $nR_n = (X-1)\,R_n'$ donc l'égalité reste vraie. Conclusion,

$$\boxed{nR_n^{(p-1)} = (X-1)\,R_n^{(p)} + (p-1)\,R_n^{(p-1)}.}$$

8. On sait que p est la multiplicité de a. Donc par caractérisation avec les dérivées, on a $R_n^{(p-1)}(a) = 0$ et $R_n^{(p)}(a) \neq 0$. Donc en prenant $X=a$ dans le résultat de la question précédente,

$$0 = (a-1)\,R_n^{(p)}(a) + 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a-1=0 \qquad \text{car } R_n^{(p)}(a) \neq 0.$$

Conclusion,

$$a = 1.$$

Par le théorème de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, on sait qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ (les racines de R_n), $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ (les multiplicités des racines) et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$R_n = \lambda \prod_{k=1}^{m} (X-\alpha_k)^{n_k},$$

avec $\lambda \neq 0$ car R_n n'est pas constant par hypothèse. Or par la question précédente, R_n ne possède qu'une unique racine $a=1$. Donc $m=1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ (la multiplicité de 1) tel que

$$\boxed{R_n = \lambda\,(X-1)^p\,.}$$

9. En injectant l'expression précédente dans l'équation (E_n), on obtient

$$\begin{aligned} & n\,\lambda\,(X-1)^p = (X-1)\,p\,\lambda\,(X-1)^{p-1} && \text{car } p \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow \quad & n\,\lambda\,(X-1)^p = p\,\lambda\,(X-1)^p \end{aligned}$$

Par unicité du coefficient dominant $n\,\lambda = p\,\lambda$. Or $\lambda \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{n = p.}$$

10. Si R_n n'est pas constant, alors par les questions précédentes, $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $R_n = \lambda\,(X-1)^n$ et donc $R_n \in \mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right)$. Supposons $R_n \in \mathscr{S}_n$ constant, $R_n = c$ avec $c \in \mathbb{C}$. Alors $R_n' = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Dès lors,

$$(E_n) \qquad nR_n = (X-1)\,R_n' \qquad \Leftrightarrow \qquad nc = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = 0 \qquad \text{car } n \neq 0.$$

Donc $R_n = 0 \in \mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right)$. Donc

$$\mathscr{S}_n \subseteq \mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right).$$

Réciproquement, soit $R_n \in \mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right)$. Dès lors,

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{C}, \qquad R_n = \lambda\,(X-1)^n\,.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (X-1)\,R_n' &= (X-1)\,n\,\lambda\,(X-1)^{n-1} && \text{car } n \geqslant 1 \\ &= n\,\lambda\,(X-1)^n \\ &= nR_n. \end{aligned}$$

Donc $R_n \in \mathscr{S}_n$ et ainsi,

$$\mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right) \subseteq \mathscr{S}_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_n = \mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right).}$$

Partie 3 : Factorisation des Q_n

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on note $\omega_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

11. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_{n-k} &= \operatorname{cotan}\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)\\ &= \operatorname{cotan}\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right)\\ &= \frac{\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right)}\\ &= \frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\\ &= -\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\omega_{n-k} = -\omega_k\,.}$$

On pose $R_n = (X-1)^n$ et $Q_n = R_n(X+2) - R_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

12. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$Q_2 = (X+1)^2 - (X-1)^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 + 2X - 1 = 4X.$$

Aussi,

$$Q_3 = (X+1)^3 - (X-1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - \left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right) = 6X^2 + 2.$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}Q_4 = (X+1)^4 - (X-1)^4 &= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 - \left(X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1\right)\\ &= 8X^3 + 8X.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{Q_2 = 4X, \qquad Q_3 = 6X^2 + 2, \qquad Q_4 = 8X^3 + 8X.}$$

13. Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ tel que $n = 2p$. Dès lors,

$$\begin{aligned}Q_n(-X) = (-X+1)^n - (-X-1)^n &= (-X+1)^{2p} - (-X-1)^{2p}\\ &= (X-1)^{2p} - (X+1)^{2p} && \text{car } (-1)^{2p} = 1\\ &= -Q_n.\end{aligned}$$

Donc dans ce cas, Q_n est impair.

Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$ tel que $n = 2p+1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}Q_n(-X) = (-X+1)^n - (-X-1)^n &= (-X+1)^{2p+1} - (-X-1)^{2p+1}\\ &= -(X-1)^{2p+1} + (X+1)^{2p+1} && \text{car } (-1)^{2p+1} = 1\\ &= Q_n.\end{aligned}$$

Donc dans ce cas, Q_n est pair.

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le polynôme } Q_n \text{ est de même parité que } n+1.}$$

14. Par la formule du binôme de Newton, on a

$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

De même $(X-1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k}$. D'où,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \left(1-(-1)^{n-k}\right).$$

Si $k=n$, on a $1-(-1)^{n-k} = 1-1 = 0$. Si $k = n-1$, on a $1-(-1)^{n-k} = 2$. Donc

$$Q_n = \binom{n}{n-1} 2X^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k \left(1-(-1)^{n-k}\right)}_{=A} \qquad \text{car } n \geqslant 2.$$

Or $\deg(A) \leqslant n-2$. Conclusion,

$$\boxed{\deg(Q_n) = n-1 \qquad \text{et son coefficient dominant est } 2\binom{n}{n-1} = 2n.}$$

15. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned}
(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+1)^n = (z-1)^n \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \qquad z+1 = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} (z-1) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \qquad z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right).
\end{aligned}$$

Si $k=0$, $z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}+1\right) \Leftrightarrow 0 = -2$ impossible. Donc $k \neq 0$ et $1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 0$. Dans ce cas,

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1; n-1]\!], \qquad z = -\frac{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}.$$

Or par factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}} &= -\frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}{-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}} \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\
&= -i\,\omega_k\,.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \{-i\,\omega_k \mid k \in [\![1; n-1]\!]\}.}$$

16. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
z \text{ racine de } Q \quad &\Leftrightarrow \quad Q(z) = 0_{\mathbb{C}} \\
&\Leftrightarrow \quad (z+1)^n - (z-1)^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z \in \{-i\,\omega_k \mid k \in [\![1; n-1]\!]\}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, $-i\,\omega_k$ est une racine de Q. Montrons qu'elles sont distinctes. Soit $(k,l) \in [\![1;n-1]\!]^2$, tel que $-i\,\omega_k = -i\,\omega_l$. Alors, $\omega_k = \omega_l$ i.e.

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{l\pi}{n}\right).$$

Or $\frac{k\pi}{n} \in]0;\pi[$ et $\frac{l\pi}{n} \in]0;\pi[$ car $(k,l) \in [\![1;n-1]\!]^2$ et par la question 3. des préliminaires cotan définit une bijection de $]0;\pi[$ dans $\mathbb{R}$. Notamment cotan est injective sur $]0;\pi[$ donc

$$\frac{k\pi}{n} = \frac{l\pi}{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = l.$$

Par contraposée, $k \neq l$ implique $-i\,\omega_k \neq -i\,\omega_l$ et les racines trouvées sont distinctes. Conclusion,

$$\boxed{Q_n \text{ possède au moins } n-1 \text{ racines distinctes : } -i\,\omega_1, -i\,\omega_2, \ldots, -i\,\omega_{n-1}.}$$

17. Par la question précédente, $-i\,\omega_1, -i\,\omega_2, \ldots, -i\,\omega_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de Q_n et par la question 14. $\deg(Q_n) = n-1$. Donc $-i\,\omega_1, -i\,\omega_2, \ldots, -i\,\omega_{n-1}$ sont exactement les $n-1$ racines de Q_n. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$Q_n = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (X + i\,\omega_k)$$

Or toujours par la question 14. le coefficient dominant de Q_n est $2n$ donc $\lambda = 2n$. Conclusion,

$$\boxed{Q_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} (X + i\,\omega_k).}$$

18. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n = 2m+1$. Il faut rassembler les racines conjuguées l'une de l'autre. Or puisque $\omega_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \in \mathbb{R}$, on a $\overline{-i\,\omega_k} = i\,\omega_k = i\,(-\,\omega_{n-k})$ d'après la question 11.. Donc

$$\overline{-i\,\omega_k} = -i\,\omega_{n-k}\,.$$

Ainsi,

$$Q_n = Q_{2m+1} = 2n \prod_{k=1}^{2m} (X + i\,\omega_k) = 2n \prod_{k=1}^{m} (X + i\,\omega_k) \prod_{k=m+1}^{2m} (X + i\,\omega_k)\,.$$

Posons $\tilde{k} = 2m+1-k$ dans le second produit,

$$\begin{aligned} Q_n &= 2n \prod_{k=1}^{m} (X + i\,\omega_k) \prod_{k=1}^{m} (X + i\,\omega_{2m+1-k}) \\ &= 2n \prod_{k=1}^{m} \left[(X + i\,\omega_k)\,(X + i\,\omega_{n-k})\right] \\ &= 2n \prod_{k=1}^{m} \left[(X + i\,\omega_k)\left(X + \overline{i\,\omega_k}\right)\right] \\ &= 2n \prod_{k=1}^{m} \left[X^2 + 2\mathrm{Re}\,(i\,\omega_k)\,X + |i\,\omega_k|^2\right] \\ &= 2n \prod_{k=1}^{m} \left[X^2 + \left|\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\right]. \end{aligned}$$

Or si $1 \leqslant k \leqslant m$ alors $0 < \frac{k\pi}{n} = \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{\pi}{2}$. donc $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ et donc $\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$. Conclusion, dans $\mathbb{R}[X]$,

$$\boxed{Q_{2m+1} = 2\,(2m+1) \prod_{k=1}^{m} \left(X^2 + \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$$

Partie 4 : Racines de P_n

On considère toujours $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

19. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$P_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{2k} X^k = 1 + \binom{5}{2} X + \binom{5}{4} X^2 = 1 + 10X + 5X^2.$$

De même,

$$P_3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{7}{2k} X^k = 1 + \binom{7}{2} X + \binom{7}{4} X^2 + \binom{7}{6} X^3 = 1$$

Or par le triangle de Pascal, on a les coefficients suivants à l'ordre 7 : $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$. D'où

$$P_3 = 1 + 21X + 35X^2 + 7X^3.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_2 = 5X^2 + 10X + 1, \qquad P_3 = 7X^3 + 35X^2 + 21X + 1.}$$

20. (a) Soit $t \in \mathbb{C}$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} t^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} t^{2n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} t^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} t^{2n-(2k+1)+1}. \end{aligned}$$

Posons pour tout $k \in [\![0; 2n+1]\!]$, $u_k = \binom{2n+1}{k} X^k t^{2n-k+1}$. Dès lors,

$$A = \sum_{k=0}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ pair}}} u_p + \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ impair}}} u_p = \sum_{p=0}^{2n+1} u_p.$$

Ainsi, par la formule du binôme de Newton,

$$A = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k t^{2n-k+1} = (X+t)^{2n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = (X+t)^{2n+1}.}$$

(b) Par définition, on a

$$Q_{2n+1}(X) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}.$$

Donc par la question précédente en prenant $t = 1$,

$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1}.$$

De même, en prenant $t = -1$,

$$\begin{aligned} (X-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} (-1)^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} (-1)^{2n-2k} \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1}. \end{aligned}$$

Donc en faisant la différence de ces deux expressions, les termes impairs disparaissent,

$$Q_{2n+1}(X) = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}X^{2k} + 0 = 2P_n\left(X^2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{Q_{2n+1}(X) = 2P_n\left(X^2\right).}$$

21. On sait que pour tout $k \in [\![1;(2n+1)-1]\!] = [\![1;2n]\!]$, $-i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ est racine de Q_{2n+1} donc

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1;2n]\!], \qquad 0_{\mathbb{C}} &= Q_{2n+1}\left(-i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\\ &= 2P_n\left((-i)^2\,\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\\ &= 2P_n\left(-\,\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $-\,\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ est racine de P_n. Montrons que ces racines sont distinctes. Soit $(k,l) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que

$$-\,\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\,\mathrm{cotan}^2\left(\frac{l\pi}{2n+1}\right).$$

Alors,

$$\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \mathrm{cotan}^2\left(\frac{l\pi}{2n+1}\right).$$

Or $0 < \frac{k\pi}{2n+1} \leqslant \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$. De même $0 < \frac{l\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$. Donc $\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$ et $\mathrm{cotan}\left(\frac{l\pi}{2n+1}\right) > 0$. Ainsi,

$$\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \mathrm{cotan}\left(\frac{l\pi}{2n+1}\right).$$

Or par la question 3. des préliminaires, cotan est bijective donc injective sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc

$$\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{l\pi}{2n+1} \qquad \Rightarrow \qquad k = l.$$

Donc $-\,\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, $k \in [\![1;n]\!]$ forment n racines distinctes de P_n. Or $\deg(P_n) = n$ (car $\binom{2n+1}{2n} \neq 0$). Donc P_n possède exactement n racines (comptées avec multiplicité) dans $\mathbb{C}$. Donc

$$\boxed{-\,\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![1;n]\!] \text{ forment les } n \text{ racines de } P_n \text{ qui n'en possède pas d'autre.}}$$

22. Soit P un polynômes de degré $n \geqslant 1$ scindé dont les n racines sont notées $x_1, \dots x_n$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_n \neq 0$. Alors,

$$\boxed{x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \qquad \text{et} \qquad x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.}$$

23. Puisque $x_k = -\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, pour $k \in [\![1;n]\!]$ sont les racines de P_n et que son coefficient d'ordre n vaut $a_n = \binom{2n+1}{2n}$ et celui d'ordre $n-1$ $a_{n-1} = \binom{2n+1}{2n-2}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} -\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} &= -\frac{\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!(2n+1-(2n-2))!}}{\frac{(2n+1)!}{(2n)!(2n+1-2n)!}}\\ &= -\frac{\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!3!}}{\frac{(2n+1)!}{(2n)!}}\\ &= -\frac{(2n)!}{(2n-2)!6}\\ &= -\frac{2n\,(2n+1)}{6}\\ &= -\frac{n\,(2n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n\,(2n-1)}{3}.}$$

Partie 5 : Conséquence, conclusion, consécration

On admet que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
(ce qui se démontre par une simple étude de fonction).

24. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Par la décroissance de la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$0 < \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < \operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \operatorname{cotan}^2(x) + 1.$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(x).}$$

25. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Posons $x = \frac{k\pi}{2n+1}$. Alors $0 < x < \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$. Donc par la question précédente,

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Ou encore, puisque $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} > 0$,

$$\boxed{\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).}$$

26. En sommant entre 1 et n, on obtient que

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

Or par la question 23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$. Donc

$$\boxed{\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right).}$$

Or

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{n(2n-1)}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2\left(2n^2\right)}{4n^2\times 3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'autre part,

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(n+\frac{n(2n-1)}{3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4n^2}\left(\frac{2n^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Donc par le théorème d'encadrement pour les équivalents,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}.}$$

27. Deux équivalents ayant la même limite, on conclut finalement que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Après tant d'efforts, comment ne pas être émerveillé par la beauté des mathématiques...