Epreuve de mathématiques 7
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Espaces vectoriels

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$u(P) = X(1-X)P' + nXP.$$

Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on pose

$$F_k = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid u(P) = kP \} = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid X(1-X)P' + nXP = kP \}.$$

On définit également,

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad B_k = X^k (1-X)^{n-k}.$$

Enfin, on pose

$$H = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(2) = 0 \}.$$

L'objectif de ce problème est d'utiliser nos connaissances sur les espaces vectoriels pour déterminer les F_k.

Partie 1 : Généralités

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Montrer que F_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Rappeler $\mathscr{B}_{can}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie 2 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

4. Déterminer une base et la dimension de H.
5. Pour tout $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$, calculer $u(P)$.
6. Déterminer une base de F_0 et préciser sa dimension.
7. Même question pour F_1 et F_2.
8. Montrer que F_0 et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
9. Déterminer une base et la dimension de $G = F_1 + F_2$.
10. Montrer que F_0 et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
11. A-t-on $G = H$? Justifier.
12. (a) Montrer que $\mathscr{B} = (B_0, B_1, B_2)$ est libre.
    (b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
13. Retrouver le résultat de la question précédente, en calculant le rang de $\mathscr{B}$.

On suppose pour le reste du problème que $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Partie 3 : La dimension de F_k

On fixe $k \in [\![0;n]\!]$.

14. Montrer que pour $p \in [\![0;n]\!]$, $B_p \in F_k \iff p = k$.
15. Justifier que $1 \leqslant \dim(F_k) \leqslant n$.

16. Montrer que $H = \{(X-2)\,Q \mid Q \in E\}$ où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on précisera.
17. En déduire une base puis la dimension de H.
18. Montrer que F_k et H sont en somme directe. *On pourra procéder par l'absurde, supposer $P \in F_k \cap H$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et noter d la multiplicité de 2 dans P.*
19. En déduire la dimension de F_k puis que F_k et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
20. Déterminer une base de F_k.

Partie 4 : Une base adaptée

21. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$, $i \neq j$, les espaces F_i et F_j sont en somme directe.
22. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, on pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k\, B_k$. Démontrer par récurrence que pour tout $p \in [\![0;n]\!]$,
$$S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \Rightarrow \qquad \forall k \in [\![0;p]\!],\ \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$
23. En déduire que $\mathscr{B} = (B_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Problème 2 - Séries

Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ de réels **strictement positifs** on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

On précise que déterminer la nature d'une suite ou d'une série consiste à déterminer si la suite ou la série en question converge ou diverge.

Partie 1 : Autour du cas constant

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser p_n.
   (b) Déterminer pour chaque cas, la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ et en cas de convergence calculer sa somme totale.
2. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in \,]1;+\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant r$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in \,]0;1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant r$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.

Partie 2 : Théorème de comparaison pour le produit

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 1$.

4. Déterminer la monotonie de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$. On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on note q sa limite.
   (a) Montrer que q est un majorant de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Partie 3 : Lien produit-série

Pour toute la suite, on introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k).$$

6. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le lien entre p_n et s_n.
7. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.
   (a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est strictement positive.
   (c) En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.
8. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.
   (a) Déterminer la nature de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire la limite de p_n quand $n \to +\infty$.
9. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}$.
   (a) Déterminer la nature de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
   (c) Reconnaître pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n.
   (d) En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ et préciser sa somme totale.
10. On suppose que $a_1 = 1$ et que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.
   (a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie 4 : Pour finir

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - 1$.

11. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
12. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{p_n}$.
   (a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) On pose par convention $p_0 = 1$.
   Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n uniquement en fonction de p_n et de p_{n-1}.
   (c) En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge.
13. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ diverge. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.