Commentaires du DS7
Espaces vectoriels, séries numériques

Un DS bien équilibré (bravo à son concepteur) avec des parties très abordables et des parties plus élaborées. Les parties plus difficiles n'ont pratiquement pas été abordées et les parties les plus faciles ont plutôt été rentabilisées mais pas toujours. Quelques étudiants ont des difficultés à gérer des espaces engendrés de polynômes ou à traiter un produit, une somme de façon formelle. La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{55}\right)^{0,9} \times 20$.

	Soin	P1p1	P1p2	P1p3	P1p4	P1	P2p1	P2p2	P2p3	P2p4	P2	Total	Note finale
Moyenne	-1,8	4,32	6,3	0,93	0,49	12,04	3,79	2,17	5,41	0,29	11,66	21,97	8,69
Sur		5	16	16	6	43	7	5	18	13	43	86	20

Répartition	<6	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$\geqslant 12$
Effectif	12	7	5	5	9

Problème I - Espaces vectoriels

Un problème en deux morceaux : les parties 1 et 2 sont élémentaires avec beaucoup de questions très proches du cours. Ces parties ont été très bien réussies pour plusieurs qui savent dérouler les réponses sans difficulté. Au contraire elles ont révélé pour d'autres une grande incompréhension des notions basiques, avec des confusions entre espace, famille, vecteur et des difficultés sur les polynômes ou la mise sous forme d'espace engendré. Les parties 3 et 4 auraient dû constituer le coeur des recherches de la première moitié de la classe mais ont été en pratique peu abordées et trop peu résolues.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$u(P) = X(1-X)P' + nXP.$$

Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on pose

$$F_k = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid u(P) = kP\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; X(1-X)P' + nXP = kP\right\}.$$

On définit également,

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad B_k = X^k(1-X)^{n-k}.$$

Enfin, on pose

$$H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(2) = 0\}.$$

L'objectif de ce problème est d'utiliser nos connaissances sur les espaces vectoriels pour déterminer les F_k.

Partie 1 : Généralités

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Elementaire. La rédaction de la stabilité n'est pas toujours claire. Il faut bien justifier que P et Q sont dans H. Il faut bien ensuite montrer que $R = \lambda P + \mu Q$ s'annule en 2 et en déduire que $R \in H$ avant de conclure. La notation a été très généreuse sur cette question et la suivante.

2. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Montrer que F_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Même remarque. Plusieurs partent du résultats en écrivant que $u(R) = kR$. La rédaction et le raisonnement manquent parfois de clarté, cela ne semble pas complètement acquis pour tout le monde.

3. Rappeler $\mathscr{B}_{can}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Cadeau.

Partie 2 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

4. Déterminer une base et la dimension de H.

   De bonnes réponses dans la grande majorité mais pas pour tout le monde. Si l'on bloque à cette question c'est que l'on est passé complètement à côté du chapitre.

5. Pour tout $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$, calculer $u(P)$.

   Lisez avec davantage d'attention l'énoncé ! Beaucoup ne remplacent pas n par 2. Il est préférable de donner le résultat en factorisant par les monômes plutôt qu'en factorisant par les coefficients.

6. Déterminer une base de F_0 et préciser sa dimension.

   Beaucoup, beaucoup d'erreurs. Se tromper ici vous bloque pour toute la suite... J'ai vu des divisions par des polynômes ou des coefficients fixes égaux à des polynômes de degré non constant sans que cela vous perturbe ou encore beaucoup d'écritures du genre :

   $$P = a_0 - 2a_0X + a_0X^2 \qquad \text{donc } F_0 = \operatorname{Vect}\left(1, -2X, X^2\right).$$

   ce qui traduit une méconnaissance forte de l'espace engendré. A reprendre d'urgence pour tous ceux qui se sont trompés.

7. Même question pour F_1 et F_2.

   Même question, mêmes erreurs.

8. Montrer que F_0 et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   Plusieurs pensent qu'il suffit de montrer que $F_0 \cap H = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. N'oubliez pas de vous servir de la dimension c'est plus rapide. Soyez critiques aussi envers vos résultats. Certains ont des dimensions complètement incohérentes mais n'en sont absolument pas perturbés. Je rappelle que pour que F_0 et H soient supplémentaires puisque l'on est en dimension finie IL FAUT que $\dim(F_0) + \dim(H) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ (et c'est même en réalité la moitié du travail). N'oubliez pas de citer les questions précédentes quand vous utilisez un résultat précédent.

9. Déterminer une base et la dimension de $G = F_1 + F_2$.

   Beaucoup me disent que les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré... puis font des opérations élémentaires sur des familles ! ! ! Bien réussie à condition d'avoir le bon F_1 et le bon F_2 naturellement.

10. Montrer que F_0 et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

    Mêmes remarques que précédemment.

11. A-t-on $G = H$? Justifier.

    Plusieurs ont bloqué ici. Certains ont réussi à montrer que $G = H$ alors que $G \neq H$. Question volontairement un peu piégeuse car G et H ont même dimension. Pire G et H sont tous les deux des supplémentaires de F_0 et sont pourtant distincts. Il faut montrer qu'au moins un vecteur de G n'est pas dans H ou l'inverse.

12. (a) Montrer que $\mathscr{B} = (B_0, B_1, B_2)$ est libre.

    Certains partent sur l'espace engendré ? ? ? ? ? ? ? ? ? Non, on déroule bien entendu la définition. Certains m'inventent des B_0, B_1 et B_2 sortis d'on ne sait où. Lisez l'énoncé ! La famille B_i est définie en début de sujet et on supposait dans toute cette partie $n = 2$. J'ai vu du

    $$a_0 + a_1X + a_2X^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1X = 0 \\ a_2X^2 = 0 \end{cases}.$$

Chose étrange que je n'ai jamais écrite. Plusieurs bonnes réponses cependant.

(b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Boooaaaaa ! Vous êtes partis sur l'espace engendré (ou du charabia incompréhensible pour certains) alors qu'une ligne en disant que le cardinal coïncide avec la dimension ! **La dimension, c'est béton**.

13. Retrouver le résultat de la question précédente, en calculant le rang de $\mathscr{B}$.

    On souhaitait le résultat de TOUTE la question précédente i.e. la question 12 au complet et non juste la 12.b). La rédaction du calcul du rang n'est pas toujours exemplaire. La conclusion est quant à elle très rarement bien justifiée. A bien revoir. Le rang d'une famille (pas d'un espace vectoriel cela n'existe pas) est un outil important.

On suppose pour le reste du problème que $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Partie 3 : La dimension de F_k

On fixe $k \in [\![0; n]\!]$.

14. Montrer que pour $p \in [\![0; n]\!]$, $B_p \in F_k \;\Leftrightarrow\; p = k$.

    Un gros piège pour le signe dans la dérivée de $(1 - X)^{n-p}$. Plusieurs forçages mais aussi plusieurs belles réponses. 1 point pour ceux qui pensaient à traiter les cas $p = 0$ et $p = n$ à part (mais personne n'a eu ce point).

15. Justifier que $1 \leqslant \dim(F_k) \leqslant n$.

    Pas très difficile mais beaucoup de confusions et de forçages ici aussi. Finalement très peu de bonnes réponses.

16. Montrer que $H = \{(X-2)Q \mid Q \in E\}$ où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on précisera.

    Quelques bonnes réponses mais pas assez à mon goût.

17. En déduire une base puis la dimension de H.

    Peu traitée mais quelques bonnes réponses.

18. Montrer que F_k et H sont en somme directe.

    On pourra procéder par l'absurde, supposer $P \in F_k \cap H$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et noter d la multiplicité de 2 dans P.

    Aucune bonne réponse. Personne n'a suivi l'indication jusqu'au bout. Notamment la notion de multiplicité vous semble étrangère...

19. En déduire la dimension de F_k puis que F_k et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

    Pratiquement pas traitée ou sans succès.

20. Déterminer une base de F_k.

    Non traitée.

Partie 4 : Une base adaptée

21. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![0; n]\!]^2$, $i \neq j$, les espaces F_i et F_j sont en somme directe.

    Quelques bonnes réponses. Certains font un raisonnement et tombent sur une absurdité sans se perturber. Sauf dans un raisonnement par l'absurde c'est gênant de tomber sur une contradiction !!!

22. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $p \in [\![0; n]\!]$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k B_k$. Démontrer par récurrence que pour tout $p \in [\![0; n]\!]$,
$$S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \Rightarrow \qquad \forall k \in [\![0; p]\!],\ \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$
Aucune bonne réponse. Vous pensez que supposer $\mathscr{P}(p+1)$ implique que forcément $S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ ce qui est très loin d'être clair, si $S_{p+1} = 0$ cela signifie que $S_p + ... = 0$ et ce n'est pas clair du tout pourquoi chaque morceau de la somme devrait être nul !

23. En déduire que $\mathscr{B} = (B_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Du bricolage alors que la dimension c'est béton !

Problème II - Séries

Les grands classiques sont bien passés mais globalement vous manquez de recul sur les notions. Plusieurs ont été déstabilisé par le formalisme de ce problème où l'on parle de séries dont le terme général est un produit par exemple. Le lien entre s_n et p_n est souvent assez fragile. Des hors sujets également par manque de compréhension des consignes.

Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ de réels **strictement positifs** on pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

On précise que déterminer la nature d'une suite ou d'une série consiste à déterminer si la suite ou la série en question converge ou diverge.

Partie 1 : Autour du cas constant

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser p_n.
   Cadeau. Quelques erreurs malgré tout. Testez votre résultat pour $n = 2$ par exemple.
   (b) Déterminer pour chaque cas, la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n$ et en cas de convergence calculer sa somme totale.
   Les séries géométriques sont du cours dont le résultat peut-être donné directement (notamment le cas $a \geqslant 1$ même si certains l'ont proprement redémontré en parlant bien de divergence grossière). Inutile de traiter le cas $a = 1$ à part. Ne pas traiter les cas $a \leqslant 0$ puisque par hypothèse $a > 0$. Un ou deux étudiants seulement ont vu que la somme totale commençait à 1 et non à 0. Il faut être davantage attentif aux définitions de l'énoncé.

2. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]1; +\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant r$. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n$.
Beaucoup de hors sujets puisque vous n'avez pas vu que l'on changeait de question et donc a_n n'est plus constant (vous auriez dû vous rendre compte que sinon la question n'avait que peu d'intérêt). Au lieu du théorème de comparaison, on pouvait parler de divergence grossière cela marchait aussi.

3. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]0; 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant r$. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n$.
Plusieurs étudiants ont commis l'erreur de l'anti-prop III.3. Il est très important d'appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs aux termes généraux des séries. N'oubliez pas d'écrire la positivité de ces termes généraux.

Partie 2 : Théorème de comparaison pour le produit

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 1$.

4. Déterminer la monotonie de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Pour parler du quotient, il faut préciser $p_n \neq 0$ puis pour revenir à $p_{n+1} > p_n$ de stricte positivité !!! Trop souvent oublié.

5. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$.

   On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on note q sa limite.

   (a) Montrer que q est un majorant de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Ce n'est pas toujours très clair. Il faut citer le théorème de convergence monotone.

   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Quelques réponses confuses mais globalement des réponses justes. Le théorème de convergence monotone doit toujours être cité.

Partie 3 : Lien produit-série

Pour toute la suite, on introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k).$$

6. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le lien entre p_n et s_n.

   Cadeau. De façon plus général pour transformer un produit en somme, pensez vous même en autonomie à introduire le logarithme.

7. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

   (a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Plusieurs belles réponses. Un grand classique. Malheureusement quelques-uns se sont amusés à sommer les petits o. Si $a_k \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ difficile d'appliquer cette relation asymptotique à $k = 1$... et donc notamment à $\sum_{k=1}^{n} a_k$ qui comporte du $k = 1$.

   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est strictement positive.
   Beaucoup de confusions. Il suffisait juste d'inverser la relation et de voir que $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$ et de passer à la limite. Presque personne n'a vu cette relation... Pire certains affirment $\forall n \geqslant 1$, $p_n > 0$ et concluent $\lim_{n\to+\infty} p_n > 0$. Vous aurez beau vous entêter à le répéter, ce résultat restera toujours faux et ne vous apportera jamais de point B)

   (c) En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.
   Un petit coup de divergence grossière. Plusieurs l'ont bien vue.

8. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

   (a) Déterminer la nature de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Il fallait juste remarquer que $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Plusieurs l'ont bien vu mais pas tous, certains se sont compliqué la vie.

   (b) En déduire la limite de p_n quand $n \to +\infty$.
   Le fait que $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ est souvent jugé acquis. Le détailler était exigé dans mon barème.

9. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}$.

(a) Déterminer la nature de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Plusieurs bonnes réponses mais aussi plusieurs erreurs, pourtant la question est sans difficulté puisque là aussi la divergence est grossière.

(b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
Le parachutage de $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ est encore plus flagrant ici car $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\ln(n)$ ne fait pas partie des séries de référence il est donc évident qu'une démonstration s'imposait mais personne ne l'a faite. Il nous faut encore gagner en autonomie et en rigueur.

(c) Reconnaître pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n.
Quelques futés l'avaient vu avant. Plusieurs succès et plusieurs échecs.

(d) En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ et préciser sa somme totale.
Deux ou trois étudiants seulement ont reconnu la série exponentielle. C'est pourtant du cours.

10. On suppose que $a_1 = 1$ et que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

(a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
Puisque la somme totale était exigée il fallait reconnaitre une somme télescopique. Plusieurs ont réussi à montrer la convergence mais personne n'a reconnu proprement le télescopage.

(b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
Non traité.

Partie 4 : Pour finir

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - 1$.

11. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Une ou deux belles tentatives.

12. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{p_n}$.

(a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Plus dure et non traitée.

(b) On pose par convention $p_0 = 1$.
Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n uniquement en fonction de p_n et de p_{n-1}.
Une bonne réponse.

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge.
Non traitée.

13. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ diverge. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Non traitée.