Corrigé du Devoir Surveillé 7
Espaces vectoriels, séries numériques

Problème I - Espaces vectoriels

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$u(P) = X(1-X)P' + nXP.$$

Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on pose

$$F_k = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid u(P) = kP \} = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,\middle|\, X(1-X)P' + nXP = kP \right\}.$$

On définit également,

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad B_k = X^k (1-X)^{n-k}.$$

Enfin, on pose

$$H = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(2) = 0 \}.$$

L'objectif de ce problème est d'utiliser nos connaissances sur les espaces vectoriels pour déterminer les F_k.

Partie 1 : Généralités

1. On observe les points suivants :

   - $H \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, alors on a directement $P(2) = 0_{\mathbb{R}}$ donc $0_{\mathbb{R}_n[X]} \in H$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in H^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. On a

     $$R(2) = (\lambda P + \mu Q)(2) = \lambda P(2) + \mu Q(2).$$

     Or $P \in H$ donc $P(2) = 0$ et $Q \in H$ donc $Q(2) = 0$. Ainsi, $R(2) = 0$ et donc $R = \lambda P + \mu Q \in H$. L'ensemble H est donc stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

   $$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. On observe les points suivants.

   - $F_k \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors, $X(1-X)P' + nXP = X(1-X) \times 0_{\mathbb{R}_n[X]} + nX \times 0_{\mathbb{R}_n[X]} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} = k0_{\mathbb{R}_n[X]} = kP$. Donc $0_{\mathbb{R}_n[X]} \in F_k$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in F_k^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Montrons que $R \in F_k$ i.e. $X(1-X)R' + nXR = kR$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

     $$\begin{aligned} X(1-X)R' + nXR &= X(1-X)(\lambda P + \mu Q)' + nX(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda \big(X(1-X)P' + nXP \big) + \mu \big(X(1-X)Q' + nXQ \big) \\ &\qquad \text{par linéarité de la dérivée et du produit à gauche} \\ &= \lambda kP + \mu kQ \qquad \text{car } P \in F_k \text{ et } Q \in F_k \\ &= k(\lambda P + \mu Q) \\ &= kR. \end{aligned}$$

     Donc $R = \lambda P + \mu Q \in F_k$ et F_k est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{F_k \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\boxed{\mathscr{B}_{can} = \left(1, X, X^2, \dots, X^n\right).}$$

On en déduit notamment que

$$\boxed{\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = \mathrm{Card}\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = n+1.}$$

Partie 2 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

4. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned} H &= \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0 \} \\ &= \left\{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_0 = -2a_1 - 4a_2 \right\} \\ &= \left\{ P = -2a_1 - 4a_2 + a_1 X + a_2 X^2 \;\middle|\; (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ P = a_1 (X-2) + a_2 \left(X^2 - 4\right) \;\middle|\; (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(X - 2, X^2 - 4\right). \end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_H = \left(X - 2, X^2 - 4\right)$. La famille $\mathscr{B}_H$ engendre H. De plus $\mathscr{B}_H$ est composée de deux vecteurs non colinéaires (ou de deux polynômes de degrés distincts). Donc $\mathscr{B}_H$. D'où,

$$\boxed{\mathscr{B}_H = \left(X - 2, X^2 - 4\right) \text{ est une base de } H.}$$

En particulier,

$$\boxed{\dim(H) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_H\right) = 2.}$$

5. Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned} u(P) &= X(1-X)P' + 2XP \\ &= X(1-X)(2a_2X + a_1) + 2X\left(a_2X^2 + a_1X + a_0\right) \\ &= \left(X - X^2\right)(2a_2X + a_1) + 2a_2X^3 + 2a_1X^2 + 2a_0X \\ &= (a_1 + 2a_2)X^2 + (2a_0 + a_1)X. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\boxed{u(P) = (a_1 + 2a_2)X^2 + (2a_0 + a_1)X.}$$

6. Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$. Par la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in F_0 \quad &\Leftrightarrow \quad u(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad (a_1 + 2a_2)X^2 + (2a_0 + a_1)X = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_0 + a_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{par unicicté des coefficients d'un polynôme} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2}a_1 \\ a_0 = -\frac{1}{2}a_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad P = -\frac{1}{2}a_1X^2 + a_1X - \frac{1}{2}a_1 = -\frac{1}{2}a_1\left(X^2 - 2x + 1\right). \end{aligned}$$

Ainsi,
$$F_0 = \text{Vect}\left((X-1)^2\right).$$
Posons $\mathscr{B}_0 = \left((X-1)^2\right)$. $\mathscr{B}_0$ est libre car constitué d'un seul vecteur non nul. De plus $\mathscr{B}_0$ engendre F_0 donc
$$\boxed{\mathscr{B}_0 \text{ est une base de } F_0.}$$
En particulier,
$$\boxed{\dim(F_0) = \text{Card}(\mathscr{B}_0) = 1.}$$

7. De même, pour $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$, on a
$$\begin{aligned}
P \in F_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (a_1+2a_2)X^2 + (2a_0+a_1)X = a_2X^2 + a_1X + a_0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 2a_2 = a_2 \\ 2a_0 + a_1 = a_1 \\ 0 = a_0 \end{cases} \qquad \text{par unicicté des coefficients} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad P = a_1\left(-X^2 + X\right).
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$F_1 = \text{Vect}\left(X^2 - X\right).$$
Posons $\mathscr{B}_1 = \left(X^2 - X\right)$. $\mathscr{B}_1$ est constitué d'un seul vecteur non nul, donc $\mathscr{B}_1$ est libre et engendre F_1 donc
$$\boxed{\left(X^2 - X\right) \text{ est une base de } F_1 \text{ et } \dim(F_1) = \text{Card}(\mathscr{B}_1) = 1.}$$
Enfin, avec les mêmes notations,
$$\begin{aligned}
P \in F_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (a_1+2a_2)X^2 + (2a_0+a_1)X = 2a_2X^2 + 2a_1X + 2a_0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 2a_2 \\ 2a_0 + a_1 = 2a_1 \\ 0 = a_0 \end{cases} \qquad \text{par unicicté des coefficients} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad P = a_2X^2
\end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{\left(X^2\right) \text{ est une base de } F_2 \text{ et } \dim(F_2) = 1.}$$

8. Montrons que F_0 et H sont supplémentaires. On a les deux points suivants.

- Par les questions précédentes, $\dim(F_0) + \dim(H) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
- Montrons que $F_0 \cap H = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a
$$\begin{aligned}
P \in F_0 \cap H \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P \in \text{Vect}\left((X-1)^2\right) \\ P(2) = 0 \end{cases} \qquad \text{d'après la question 6.} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda(X-1)^2 \\ P(2) = \lambda = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}[X]}.
\end{aligned}$$
D'où $F_0 \cap H = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$.

Conclusion, par les deux points précédents,

$$\boxed{F_0 \text{ et } H \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_2[X].}$$

9. Par les questions précédentes,

$$G = F_1 + F_2 = \operatorname{Vect}\left(X^2 - X\right) + \operatorname{Vect}(X) = \operatorname{Vect}\left(X^2 - X, X\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$G = \operatorname{Vect}\left(X^2, X\right) \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

La famille $\mathscr{B}_G = \left(X^2, X\right)$ est libre (en tant que sous-famille de la base canonique ou famille de deux vecteurs non colinéaires ou famille de polynômes de degrés distincts) et engendre G. Donc Donc

$$\boxed{\mathscr{B}_G = \left(X^2, X\right) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = 2.}$$

10. On observe les deux points suivants.

- Par les questions précédentes, $\dim(F_0) + \dim(G) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
- D'autre part,

$$F_0 + G = \operatorname{Vect}\left((X-1)^2\right) + \operatorname{Vect}\left(X^2, X\right) = \operatorname{Vect}\left((X-1)^2, X^2, X\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F_0 + G &= \operatorname{Vect}\left(X^2 - 2X + 1, X^2, X\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(1, X^2, X\right) \qquad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + 2C_3 \\ &= \mathbb{R}_2[X] \qquad \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{R}_2(X]. \end{aligned}$$

Par les deux points précédents, on en déduit que

$$\boxed{\text{Les espaces } F_0 \text{ et } G \text{ sont supplémentaires.}}$$

11. On a vu précédemment que $X - 2 \in H$. Montrons que $X - 2 \notin G$. Par l'absurde. Supposons $X - 2 \in G = \operatorname{Vect}\left(X^2, X\right)$. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X - 2 = aX^2 + bX.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, $a = 0$, $a = 1$ et $-2 = 0$ ce qui est absurde. Donc $X - 2 \notin G$. Conclusion,

$$\boxed{G \neq H.}$$

G et H sont deux supplémentaires distincts de F_0.

12. (a) Par définition, pour $n = 2$, on a

$$\mathscr{B} = \left(X^0(1-X)^2, X^1(1-X)^1, X^2(1-X)^0\right) = \left((1-X)^2, X(1-X), X^2\right).$$

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1-X)^2 + bX(1-X) + cX^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

On pourrait tout développer, utiliser l'unicité des coefficients et résoudre le petit système. Faisons autrement. Notamment, en évaluant en 0, $a = 0$. Donc

$$bX(1-X) + cX^2 = 0.$$

En évaluant en 1, $c = 0$. Donc $bX(1-X) = 0$. Or $X(1-X)$ n'est pas le polynôme nul. D'où, $b = 0$. Ainsi, $a = b = c = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} = (B_0, B_1, B_2) \text{ est libre.}}$$

(b) On a les deux points suivants.
- $\mathscr{B}$ est libre par la question précédente.
- $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

13. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang, donc

$$\begin{aligned}
\text{rg}(\mathscr{B}) &= \text{rg}\left((1-X)^2, X(1-X), X^2\right) \\
&= \text{rg}\left(1-2X+X^2, X-X^2, X^2\right) \\
&= \text{rg}\left(1-2X, X, X^2\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{array} \\
&= \text{rg}\left(1, X, X^2\right) && C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2.
\end{aligned}$$

On reconnaît la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de rang 3. Donc

$$\boxed{\text{rg}(\mathscr{B}) = 3.}$$

Donc on observe que $\text{rg}(\mathscr{B}) = \text{Card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

On suppose pour le reste du problème que $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Partie 3 : La dimension de F_k

On fixe $k \in [\![0;n]\!]$.

14. Soit $p \in [\![1;n-1]\!]$, on a

$$B_p' = \left(X^p(1-X)^{n-p}\right)' = pX^{p-1}(1-X)^{n-p} - (n-p)X^p(1-X)^{n-p-1}.$$

Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
B_p \in F_k \quad &\Leftrightarrow \quad X(1-X)B_p' + nXB_p = kB_p \\
&\Leftrightarrow \quad X(1-X)\left(pX^{p-1}(1-X)^{n-p} - (n-p)X^p(1-X)^{n-p-1}\right) \\
&\qquad\qquad + nX\left(X^p(1-X)^{n-p}\right) = k\left(X^p(1-X)^{n-p}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad pX^p(1-X)^{n-p+1} - (n-p)X^{p+1}(1-X)^{n-p} \\
&\qquad\qquad + nX^{p+1}(1-X)^{n-p} = kX^p(1-X)^{n-p} \qquad (\bigstar)
\end{aligned}$$

On note que si $p=0$, on a $B_0 = (1-X)^n$ donc $B_0' = -n(1-X)^{n-1}$ et par suite,

$$B_0 \in F_k \quad \Leftrightarrow \quad -nX(1-X)^n + nX(1-X)^n = k(1-X)^n.$$

On retrouve bien ($\bigstar$). De même si $p=n$, $B_n = X^n$, $B_n' = nX^{n-1}$ et

$$B_n \in F_k \quad \Leftrightarrow \quad nX^n(1-X) + nX^{n+1} = kX^n.$$

On retrouve encore ($\bigstar$). Ainsi, pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, en simplifiant par $X^p(1-X)^{n-p}$,

$$\begin{aligned}
B_p \in F_k \quad &\Leftrightarrow \quad (\bigstar) \\
&\Leftrightarrow \quad p(1-X) - (n-p)X + nX = k \\
&\Leftrightarrow \quad p = k.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in [\![0;n]\!], \qquad (B_p \in F_k \Leftrightarrow p = k).}$$

15. Par la question précédente, on a $B_k \in F_k$. Donc $\text{Vect}(B_k) \subseteq F_k$. Ces espaces étant de dimensions finies (car ce sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}_n[X]$ lui même de dimension finie), on a

$$\dim(\text{Vect}(B_k)) \leqslant \dim(F_k).$$

Or (B_k) est une famille libre car $B_k \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et (B_k) engendre $\text{Vect}(B_k)$. Donc (B_k) est une base de $\text{Vect}(B_k)$. Ainsi,

$$1 = \dim(\text{Vect}(B_k)) \leqslant \dim(F_k).$$

D'autre part, par définition, $F_k \subseteq \mathbb{R}_n[X]$, donc $\dim(F_k) \leqslant \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$. Cependant, $F_k \neq \mathbb{R}_n[X]$, car par la question précédente, on a par exemple $B_0 \notin F_k$ (ou pour $k=0$, on a $B_n \notin F_0$). Donc $\dim(F_k) \neq \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Ainsi,

$$\dim(F_k) < \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1.$$

Conclusion,

$$\boxed{1 \leqslant \dim(F_k) \leqslant n.}$$

16. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$P \in H \quad \Leftrightarrow \quad P(2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X-2 \text{ divise } P \quad \Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = (X-2)\,Q.$$

Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ i.e. $\deg(P) \leqslant n$. Donc $\deg((X-2)\,Q) = 1 + \deg(Q) \leqslant n$ i.e. $\deg(Q) \leqslant n-1$ ou encore $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Réciproquement, si $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P = (X-2)\,Q$, alors, on a bien $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(2) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{H = \{\,(X-2)\,Q \mid Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\,\}.}$$

17. Par la question précédente, on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}
H &= \{\,(X-2)\,Q \mid Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\,\} \\
&= \left\{\,(X-2)\left(a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}\right) \,\middle|\, (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\,\right\} \\
&= \left\{\,a_0\,(X-2) + a_1 X\,(X-2) + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}\,(X-2) \,\middle|\, (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\,\right\} \\
&= \text{Vect}\underbrace{\left(X-2, X\,(X-2), \ldots, X^{n-1}\,(X-2)\right)}_{=\mathscr{B}_H}.
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_H$ engendre H. De plus, $\mathscr{B}_H$ est constituée de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}_H$ est libre. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{B}_H = \left(X-2, X\,(X-2), \ldots, X^{n-1}\,(X-2)\right) \text{ est une base de } H.}$$

En particulier,

$$\boxed{\dim(H) = \text{Card}(\mathscr{B}_H) = n.}$$

18. Soit $P \in F_k \cap H$. Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Puisque $P \in H$ alors $P(2) = 0$ et donc 2 est une racine de P de multiplicité $d \geqslant 1$. On a alors $P = (X-2)^d\,Q$ avec $Q(2) \neq 0$. Par suite $P' = d\,(X-2)^{d-1}\,Q + (X-2)^d\,Q'$. Or $P \in F_k$ donc

$$\begin{aligned}
& X\,(1-X)\,P' + nXP = kP \\
\Rightarrow\quad & X\,(1-X)\,d\,(X-2)^{d-1}\,Q + X\,(1-X)\,(X-2)^d\,Q' + nX\,(X-2)^d\,Q = k\,(X-2)^d\,Q \\
\Rightarrow\quad & dX\,(1-X)\,Q + X\,(1-X)\,(X-2)\,Q' + nX\,(X-2)\,Q = kQ
\end{aligned}$$

En évaluant en 2,

$$-2dQ(2) = kQ(2) \quad \Leftrightarrow \quad -2d = k \text{car } Q(2) \neq 0.$$

Or $-2d \leqslant -2$ et $k \geqslant 0$ ce qui est impossible. Donc si $P \in F_k \cap H$, alors $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. La réciproque étant aussi vraie, on en déduit que $F_k \cap H = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. Conclusion,

$$\boxed{F_k \text{ et } H \text{ sont en somme directe.}}$$

19. Par la question précédente, on en déduit que

$$\dim(F_k) + \dim(H) = \dim(F_k + H).$$

Or $F_k + H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(F_k + H) \leqslant n + 1$. D'autre part, on a vu que $\dim(H) = n$. Ainsi,

$$\dim(F_k) + n \leqslant n + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dim(F_k) \leqslant 1.$$

Or par la question 15. $\dim(F_k) \geqslant 1$. Conclusion,

$$\boxed{\dim(F_k) = 1.}$$

On a les deux points suivants.

- Par la question précédente, $F_k \oplus H$.
- $\dim(F_k) = 1$ et $\dim(H) = n$. Donc $\dim(F_k) + \dim(H) = 1 + n = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

Conclusion,

$$\boxed{F_k \text{ et } H \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_n[X].}$$

20. On a vu que B_k est un vecteur non nul de F_k. Donc (B_k) est une famille libre de F_k. De plus, $\dim(F_k) = 1 = \mathrm{Card}((B_k))$. Conclusion,

$$\boxed{(B_k) \text{ est une base de } F_k.}$$

Partie 4 : Une base adaptée

21. Soient $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$, $i \neq j$. Montrons que F_i et F_j sont en somme directe. Soit $P \in F_i \cap F_j$. Alors,

$$\begin{aligned} iP = X(1-X)P' + nXP = jP \qquad &\Rightarrow \qquad iP = jP \\ &\Rightarrow \qquad (i-j)P = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Rightarrow \qquad P = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ car } i \neq j. \end{aligned}$$

Donc $F_i \cap F_j \subseteq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Or $\{0_{\mathbb{R}[X]}\} \subseteq F_i \cap F_j$ car F_i et F_j sont des sous-espaces vectoriels. Donc

$$F_i \cap F_j = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in [\![0;n]\!]^2,\ i \neq j,\ F_i \text{ et } F_j \text{ sont en somme directe.}}$$

22. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k B_k$. Posons pour tout $p \in [\![0;n]\!]$,

$$\mathscr{P}(p) : \qquad \text{« } S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Rightarrow \forall k \in [\![0;p]\!],\ \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}. \text{ »}$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $p = 0$. Alors $S_0 = \lambda_0 B_0 = \lambda_0 (1-X)^n$. Dès lors,

$$S_0 = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_0 (1-X)^n = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_0 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$.

Hérédité. Soit $p \in [\![0;n-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(p+1)$. Par définition, on a

$$S_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \lambda_k B_k = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k B_k + \lambda_{p+1} B_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k X^k (1-X)^{n-k} + \lambda_{p+1} X^{p+1} (1-X)^{n-p-1}.$$

Supposons $S_{p+1} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors,

$$\begin{array}{rl} & \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \, X^k \, (1-X)^{n-k} + \lambda_{p+1} \, X^{p+1} \, (1-X)^{n-p-1} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \\ \Rightarrow & \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \, X^k \, (1-X)^{n-k-(n-p-1)} + \lambda_{p+1} \, X^{p+1} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \\ \Rightarrow & \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \, X^k \, (1-X)^{p-k+1} + \lambda_{p+1} \, X^{p+1} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \end{array}$$

Or pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, on a $p-k+1>0$. Donc en évaluant en 1, $\lambda_k \, 1^k \, (1-1)^{p-k+1} = 0$. Ainsi, en évaluant en 1,

$$\lambda_{p+1} = 0.$$

D'où

$$0_{\mathbb{R}[X]} = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \, X^k \, (1-X)^{n-k} = S_p.$$

Or on a supposé $\mathscr{P}(p)$. Donc par hypothèse de récurrence,

$$\forall k \in [\![0;p]\!], \qquad \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$

Globalement, $\forall k \in [\![0;p+1]\!]$, $\lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $\mathscr{P}\,(p+1)$.

Conclusion, Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad \left(S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \Rightarrow \qquad \forall k \in [\![0;p]\!],\ \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}\right).}$$

23. Par la question précédente, en prenant $p=n$,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, B_k = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \Rightarrow \qquad \forall k \in [\![0;n]\!],\ \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{B} = (B_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est libre. Or $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = n+1 = \dim\,(\mathbb{R}_n[X])$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

<u>Problème II - Séries</u>

Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ de réels **strictement positifs** on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

On précise que déterminer la nature d'une suite ou d'une série consiste à déterminer si la suite ou la série en question converge ou diverge.

Partie 1 : Autour du cas constant

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a$.

   (a) On a directement,

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a = a^n.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = a^n.}$$

(b) Par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ est une série géométrique de raison a. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } a \in]0;1[,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ converge.}}$$

De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n - 1 = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}.$$

Dans ce cas la somme totale est donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{a}{1-a}.}$$

Si $a \geqslant 1$, alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. Donc

$$\boxed{\text{si } a \in [1;+\infty[,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ diverge grossièrement donc diverge.}}$$

2. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]1;+\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant r$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \geqslant \prod_{k=1}^{n} r = r^n \qquad \text{car tous les termes sont positifs.}$$

Or $r > 1$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n$ diverge en tant que série géométrique de raison $r > 1$. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant r^n \leqslant p_n.$$

Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ diverge.}}$$

3. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]0;1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant r$. On observe cette fois que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 < \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} r = r^n.$$

Puisque $r \in]0;1[$, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ converge.}}$$

Partie 2 : Théorème de comparaison pour le produit

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 1$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k > 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} a_k}{\prod_{k=1}^{n} a_k} = a_{n+1} \geqslant 1.$$

Donc, puisque $p_n > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+1} \geqslant p_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

5. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$.

   On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on note q sa limite.

   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geqslant a_n \geqslant 1$. Donc de même que dans la question précédente, la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc par le théorème de convergence monotone, sa limite (lorsqu'elle existe et c'est le cas ici) est sa borne supérieure :

   $$q = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} q_n.$$

   Or la borne supérieure est le plus petit des majorants, c'est donc notamment un majorant :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad q_n \leqslant q.}$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$. Puisque tous les termes sont positifs,

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} b_k = q_n.$$

   Donc par la question précédente,

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n \leqslant q_n \leqslant q.$$

   Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par q (réel indépendant de n). De plus par la question 4. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Conclusion, par le théorème de convergence monotone,

   $$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

Partie 3 : Lien produit-série

Pour toute la suite, on introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \ln(p_n).$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \ln(p_n) \text{ i.e. } p_n = \mathrm{e}^{s_n}.}$$

7. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Puisque $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} > 0$, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

(b) Notons s sa limite. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$. Donc par continuité de la fonction exponentielle en s, on en déduit que

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} p_n = \mathrm{e}^s > 0.}$$

(c) Puisque $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ diverge grossièrement et donc

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ diverge.}}$$

8. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(a_n) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On reconnaît la série harmonique qui diverge. Conclusion,

$$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$$

(b) Plus précisément, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty.$$

Donc par composition de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{s_n} = +\infty.}$$

9. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(a_n) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n).$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n)$ diverge grossièrement. Conclusion,

$$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) \text{ diverge.}}$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(a_k) = -\ln(k) \leqslant 0$. Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a_k) + \ln(a_n) \leqslant \ln(a_n) = -\ln(n).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty$. Donc par le théorème de minoration pour les suites, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty.$$

Conclusion, par composition de limites,

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{s_n} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.}$$

(c) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \frac{1}{n!}.}$$

(d) On reconnaît alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$ la série exponentielle de paramètre $z = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!} \text{ converge.}}$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 1 = \mathrm{e} - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \mathrm{e} - 1.}$$

10. On suppose que $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

(a) Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(a_n) &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\
&= \ln(n-1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n).
\end{aligned}$$

Donc

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \ln(a_1) + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

On reconnaît deux sommes télescopiques. Donc

$$s_n = \ln(1) + \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(2).$$

Conclusion,

$$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(a_k) = \lim_{n\to+\infty} s_n = -\ln(2).}$$

(b) Par continuité de la fonction exponentielle en $-\ln(2)$, on en déduit que

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{s_n} = \mathrm{e}^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}.}$$

Partie 4 : Pour finir

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - 1$.

11. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln(a_n) = \ln(1+u_n).$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument, notamment elle converge. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc

$$\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \Rightarrow \qquad |\ln(a_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |u_n|.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ converge. De plus $|\ln(a_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |u_n|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \geqslant 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |\ln(a_n)|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

12. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{p_n}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln(a_n) = \ln(1+u_n).$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Dès lors,

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right).$$

Par suite,

$$u_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}.$$

Or par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n^2}{2}$ converge. On a

- $u_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n^2}{2} \geqslant 0$.

Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - \ln(1+u_n)).$$

Or par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge. Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - \ln(1+u_n))$ converge en tant que différence de deux séries convergentes :

$$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) \text{ converge.}}$$

(b) On pose par convention $p_0 = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a si $n \geqslant 2$,

$$u_n = a_n - 1 = \frac{p_n}{p_{n-1}} - 1 \qquad \text{car } p_{n-1} > 0$$

La formule reste vraie pour $n = 1$, $u_1 = a_1 - 1 = p_1 - 1 = \frac{p_1}{p_0} - 1$ car $p_0 = 1$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{u_n}{p_n} = \frac{\frac{p_n}{p_{n-1}} - 1}{p_n} = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}.}$$

(c) Par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}\right)$. On reconnait une somme télescopique.
Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p_{k-1}} - \frac{1}{p_k}\right) = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_n} = 1 - \frac{1}{p_n}.$$

Par la question 12.a $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Notons s sa somme totale/sa limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$, par continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \mathrm{e}^s > 0.$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge vers $1 - \mathrm{e}^{-s}$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \text{ converge.}}$$

13. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ diverge. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Donc de même que précédemment

$$u_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n^2}{2}$ diverge, $_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n^2}{2} \geqslant 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - \ln(1+u_n)) \text{ diverge.}$$

Plus précisément puisque

$$u_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2} \geqslant 0.$$

On en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n - \ln(1+u_n) \geqslant 0$. Par suite, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n - \ln(1+u_n)$ est croissante. Puisqu'elle diverge, par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k - \ln(1+u_k) = +\infty.$$

D'autre part, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge. Notons U sa limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = U.$$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - \ln(1+u_n))$ est la différence d'une série convergente et d'une série divergente.

Attention, je rappelle que l'on ne peut rien dire de la différence de deux séries divergentes.

Nécessairement,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) \text{ diverge et même } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k) = U - \infty = -\infty.$$

D'où,

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) \text{ diverge vers } -\infty.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$. Conclusion,

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$