



Epreuve de mathématiques 8

2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numérotter les copies



Problème 1 - Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel. On s'intéresse dans ce problème aux applications linéaires vérifiant l'équation

$$f^2 = 2f. \quad (\star)$$

Partie 1 : Un exemple dans \mathbb{R}^3

On considère dans cette partie l'application

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x - y \\ -x + y \\ 2x + 2y + 2z \end{bmatrix} \end{matrix}$$

On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Déterminer le noyau de f .
4. L'application f est-elle un automorphisme?
5. Déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$.
6. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
7. Montrer que $\text{Im}(f) = F$.
8. Montrer que f vérifie (\star) .
9. Préciser une expression de f^n en fonction de f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2 : Etude générale

On suppose à nouveau E quelconque.

10. Montrer qu'il existe un unique automorphisme vérifiant (\star) que l'on précisera.
11. Déterminer tous les projecteurs de E vérifiant (\star) .

On fixe f un endomorphisme de E vérifiant (\star) .

12. Montrer que $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subseteq \text{Ker}(f)$.
13. Montrer que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \subseteq \text{Im}(f)$.
14. On suppose dans cette question uniquement que E est de dimension finie. Montrer que $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) = \text{Ker}(f)$.
15. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe.
16. On suppose dans cette question uniquement que E est de dimension finie. Que peut-on déduire de la question précédente?
17. Soient $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$. Posons $x = x_1 + x_2$. Montrer que $x_2 = \frac{1}{2}f(x)$ et en déduire x_1 en fonction de x .
18. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

19. On suppose que $f \circ g + g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(a) Montrer que $f \circ g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(b) En déduire que $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

20. On suppose que g vérifie (★). Montrer que $f + g$ est solution de (★) si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Partie 3 : En dimension infinie

On considère $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $e_k : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2kx} \end{matrix}$ et on définit φ_k pour tout $f \in E$ par

$$\varphi_k(f) = \frac{f'(0)}{k} e_k.$$

21. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, φ_k est un endomorphisme de E .

22. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, φ_k vérifie (★).

23. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k = \text{Vect}(e_k)$ et $G = \{f \in E \mid f'(0) = 0\}$ sont supplémentaires.

Problème 2 - Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On possède deux urnes : l'urne A et l'urne B ainsi que $2n$ boules : n rouges et n vertes.

Partie 1 : Dénombrement

On choisit sans ordre n boules que l'on met dans l'urne A et les n autres boules restantes vont dans l'urne B .

1. On suppose dans cette question que les boules de même couleur sont indiscernables. Un remplissage est alors uniquement caractérisé par le nombre de boules de chaque couleur. Combien y a-t-il de remplissages distincts de l'urne A ?

On suppose dans la suite toutes les boules discernables, les vertes étant numérotées de 1 à n et de même pour les rouges.

2. Déterminer le nombre de remplissages possibles de l'urne A .

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec exactement k boules vertes.

4. En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ (appelée formule de Vandermonde).

5. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec au moins une boule de chaque couleur.

6. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec exactement une seule boule numérotée 1.



On considère pour toute la suite, (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème seront définies.

On suppose à nouveau les boules de même couleur indiscernables. On remplit désormais les deux urnes de la façon suivante. On lance une pièce équilibrée à n reprises et on suppose les lancers indépendants. On note N le nombre de piles obtenus. On remplit alors l'urne A de N vertes et de $n - N$ rouges. Toutes les boules restantes vont dans l'urne B .

Une fois les urnes remplies, on procède de la façon suivante. A chaque étape, on pioche une boule dans chaque urne et on les échange. Ainsi chaque urne possède toujours à chaque étapes n boules. On pose $X_0 = N$ et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules vertes présente dans l'urne A à l'issue du/juste après le tirage k .

Partie 2 : Lois initiales

On note Y la variable aléatoire valant 1 si l'on a pioché une boule verte au premier tirage dans l'urne A et 0 sinon. Soit $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

7. Quelle est la loi de N ? Préciser $\mathbb{P}(N = 1)$.
8. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $(X_k = p)$ est réalisé. Préciser alors la composition de l'urne A et de l'urne B à l'étape k .
9. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte dans l'urne A au tirage 1 sachant que $N = p$?
10. Justifier que $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{p}{n}$.
11. En déduire que $Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Pouvait-on intuitiver ce résultat?
12. On suppose dans cette question uniquement que n est pair. Préciser suivant la valeur de p si les événements $(Y = 1)$ et $(N = p)$ sont indépendants ou non.
13. Calculer la probabilité d'avoir $N = n$ sachant que l'on a obtenu une boule verte dans l'urne A au tirage 1.

Partie 3 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$, $b_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $c_k = \mathbb{P}(X_k = 2)$.

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_k + b_k + c_k$?
15. Préciser a_0 , b_0 , c_0 .
16. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, préciser en justifiant $\mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$.
17. Déduire de la question précédente que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{k+1} = \frac{b_k}{4} \\ b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k \\ c_{k+1} = \frac{b_k}{4} \end{cases} .$$

18. *Méthode 1.*

- (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+2} = \frac{b_{k+1} + b_k}{2}$.
- (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k , b_k et c_k .

19. *Méthode 2.*

- (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+1} = 1 - \frac{b_k}{2}$.
- (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k , b_k et c_k .

20. En déduire les limites des suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$.