Commentaires du DS8
Applications linéaires et Probabilités

Des résultats très déséquilibrés entre l'algèbre qui a été bien rentabilisé et solidement traité sur le début et un problème de probabilités beaucoup moins bien réussi. Quelques-uns s'en sortent bien sur le dénombrement d'autres pas du tout mais pratiquement aucun d'entre vous cependant ne s'est vraiment approprié la partie probabilité. La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,9} \times 20$.

	Soin	P1p1	P1p2	P1p3	P1	P2p1	P2p2	P2p3	P2	Total	Note finale
Moyenne	-1,3	12,9	5,1	1,2	19,2	3,8	3,3	2	9,1	27,3	8,45
Sur		17	22	7	46	11	15	20	46	92	20

Répartition	< 6	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$\geqslant 12$
Effectif	11	5	10	4	7

Problème I - Applications linéaires

Une première partie très satisfaisante. Vous êtes nombreux (mais pas tous) à rentabiliser les questions les plus abordables, proches du cours. La rédaction est correcte et montre que les notions sont sues. Une partie 2 moins bien réussie mais plusieurs étudiant(e)s s'en sortent très honorablement même si les questions plus dures n'ont été que peu abordées. La partie 3 n'était pas si difficile, les deux premières questions étaient tout à fait faisables même si un tout petit peu plus abstraites. Cependant beaucoup ne l'ont pas cherchée.

Soit E un espace vectoriel. On s'intéresse dans ce problème aux applications linéaires vérifiant l'équation

$$f^2 = 2f. \qquad (\bigstar)$$

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On considère dans cette partie l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix} \end{array}$$

On pose $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y=0 \right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.

   Bien. N'oubliez pas lorsque vous poser $w = \lambda u + \mu v$ par exemple de bien préciser que $w \in F$ avant de conclure que F est stable par combinaisons linéaires. On dit que F est un SOUS-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puis on en déduit que F est un espace vectoriel. Il est naturellement vitale de savoir cette question basique. Plusieurs ont oublié la deuxième partie de la question. Lorsque vous citez que la famille est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires, précisez bien que les DEUX vecteurs ne sont pas colinéaires car cette propriété ne marche pas pour trois ou plus de vecteurs.

2. Montrer que f est linéaire.

   Bien.

3. Déterminer le noyau de f.

   Bien. On fixe dans un premier temps $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. PUIS on raisonne par équivalents :

$$u \in \operatorname{Ker}(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \dots$$

4. L'application f est-elle un automorphisme ?

   Inutile de partir sur la caractérisation des isomorphismes en dimension finie. Ici f n'est pas injective DONC a fortiori non bijective et donc a fortiori n'est pas un automorphisme.

5. Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

   Beaucoup parachutent la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$. Il faut parler d'une base de $\operatorname{Ker}(f)$ avec justification pour le caractère libre. Bien sur le fait de parler de la dimension finie.

6. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.

   Quelques étudiants confondent encore famille et espace mais déjà moins que lors du précédent DS. Il n'était pas nécessaire d'épurer la base ici mais c'est toujours plus élégant et cela aide pour la question d'après.

7. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = F$.

   Plutôt bien. Le plus rapide était de démontrer que les deux espaces avaient une base commune mais certains sont partis sur la double inclusion ou avec une inclusion + dimension (à favoriser par rapport à la double inclusion).

8. Montrer que f vérifie ($\bigstar$).

   Ok mais plusieurs écrivent des $f^2 = f^2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$. Attention à ne pas confondre vecteur et application. N'oubliez pas de présenter le vecteur (x, y, z).

9. Préciser une expression de f^n en fonction de f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Plusieurs pensent que $f^n = (n-1)f$ certains arrivent même à le démontrer ! PAS DE FORCAGE ! Beaucoup ont la bonne réponse mais la démonstration était attendue (il n'y avait que cela à faire dans cette question).

Partie 2 : Etude générale

On suppose à nouveau E quelconque.

10. Montrer qu'il existe un unique automorphisme vérifiant ($\bigstar$) que l'on précisera.

    Il fallait utiliser l'existence de f^{-1}. Peu de bonnes réponses.

11. Déterminer tous les projecteurs de E vérifiant ($\bigstar$).

    L'application nulle est unique, inutile de parler de tous les projecteurs nuls, il n'y en a qu'un !

On fixe f un endomorphisme de E vérifiant ($\bigstar$).

12. Montrer que $\operatorname{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.

    Quelques bricolages forcés mais pas mal de bonnes réponses. Certains ont du mal avec la manipulation de Id_E.

13. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq \operatorname{Im}(f)$.

    Même remarque.

14. On suppose dans cette question uniquement que E est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

    Quelques-uns ont réussi l'inclusion réciproque. Pas beaucoup de bonnes réponses mais quelques-unes. A bien retravailler, il faut être à l'aise dans la manipulation de la dimension.

15. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe.

    Plus facile plutôt bien réussie mais des réponses pas toujours très claires.

16. On suppose dans cette question uniquement que E est de dimension finie. Que peut-on déduire de la question précédente ?

    On pouvait être assez direct. Certains ont détaillé plus la réponse.

17. Soient $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\,(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$. Posons $x = x_1 + x_2$. Montrer que $x_2 = \frac{1}{2}f(x)$ et en déduire x_1 en fonction de x.

    Un lot satisfaisant de bonnes réponses.

18. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires.

    Une seule réponse un peu près correcte. Il était juste attendu la synthèse de la question précédente. A bien retravailler car à savoir faire.

Soit $g \in \mathscr{L}\,(E)$.

19. On suppose que $f \circ g + g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

    (a) Montrer que $f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
    Les choses se gâtent à partir d'ici, trop de forçages.

    (b) En déduire que $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
    Peu de bonnes réponses mais quelques-unes.

20. On suppose que g vérifie ($\bigstar$). Montrer que $f + g$ est solution de ($\bigstar$) si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

    ATTENTION à ne pas écrire $(f+g)^2 = f^2 + 2f \circ g + g^2$ car, comme pour les matrices, f et g ne commutent pas a priori !!! La formule est $(f+g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$.

Partie 3 : En dimension infinie

On considère $E = \mathscr{C}^1\,(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $e_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{2kx} \end{array}$ et on définit φ_k pour tout $f \in E$ par

$$\varphi_k(f) = \frac{f'(0)}{k} e_k.$$

21. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, φ_k est un endomorphisme de E.

    Deux morceaux : linéarité et de E dans E. Ceux qui traitent la question y pensent en général.

22. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, φ_k vérifie ($\bigstar$).

    Trop de confusions entre e_k et e^{2kx} on ne fait plus cette erreur au mois d'avril !!!!

23. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k = \mathrm{Vect}\,(e_k)$ et $G = \{\, f \in E \mid f'(0) = 0 \,\}$ sont supplémentaires.

    Très peu de réponses. Quelques-uns réussissent le caractère somme directe.

Problème II - Probabilités

Une partie dénombrement pas très dure. Certains s'y sont régalés et d'autres sont passés à côté. Une partie probabilité très peu rentabilisée. Il n'est pas envisageable de négliger le chapitre sur les probabilités. Il faut prendre la mesure de ce que l'on exige de vous dans ces exercices, apprendre les définitions et les formules et vous verrez qu'il est alors facile d'y gagner des points.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On possède deux urnes : l'urne A et l'urne B ainsi que $2n$ boules : n rouges et n vertes.

Partie 1 : Dénombrement

On choisit sans ordre n boules que l'on met dans l'urne A et les n autres boules restantes vont dans l'urne B.

1. On suppose dans cette question que les boules de même couleur sont indiscernables. Un remplissage est alors uniquement caractérisé par le nombre de boules de chaque couleur. Combien y a t-il de remplissages distincts de l'urne A ?

   Beaucoup de confusions. N'oubliez pas de justifier votre résultat par une argumentation en français ici.

On suppose dans la suite toutes les boules discernables, les vertes étant numérotées de 1 à n et de même pour les rouges.

2. Déterminer le nombre de remplissages possibles de l'urne A.

   Pas d'ordre ! ! ! ! Donc pas d'arrangement ni d'uplets.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec exactement k boules vertes.

   Plus de bonnes réponses ici, notamment en louchant un peu sur la formule d'en-dessous.

4. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ (appelée formule de Vandermonde).

   Encadrer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ne suffit pas comme réponse... Très très peu de bonnes réponses alors qu'il suffit d'utiliser les deux précédentes. Deux d'entre vous m'ont parlé des ensembles comme R_k dans le corrigé, chapeau à ces deux là !

5. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec au moins une boule de chaque couleur.

   Beaucoup de comptages erronés : on choisit une boule de chaque couleur et on complète. Cela ne marche pas. Par exemple vous prenez la boule verte 1 et la boule rouge 1 et vous complétez avec les vertes 2 à $n-1$ par exemple. Alors vous obtenez exactement le même remplissage en prenant la boule vertes 2, la boule rouge 1 et en complétant avec les boules vertes $1, 3, \ldots, n-1$. Donc vous comptez plusieurs fois le même remplissage. Erreur dont on a déjà discuté en TD. L'astuce était naturellement de passer au complémentaire.

6. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec exactement une seule boule numérotée 1.

   Mieux réussie.

On considère pour toute la suite, $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème seront définies.

On suppose à nouveau les boules de même couleur indiscernables. On remplit désormais les deux urnes de la façon suivante. On lance une pièce équilibrée à n reprises et on suppose les lancers indépendants. On note N le nombre de piles obtenus. On remplit alors l'urne A de N vertes et de $n-N$ rouges. Toutes les boules restantes vont dans l'urne B.

Une fois les urnes remplies, on procède de la façon suivante. A chaque étape, on pioche une boule dans chaque urne et on les échange. Ainsi chaque urne possède toujours à chaque étapes n boules. On pose $X_0 = N$ et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules vertes présente dans l'urne A à l'issue du/juste après le tirage k.

Partie 2 : Lois initiales

On note Y la variable aléatoire valant 1 si l'on a pioché une boule verte au premier tirage dans l'urne A et 0 sinon. Soit $p \in [\![0; n]\!]$.

7. Quelle est la loi de N ? Préciser $\mathbb{P}(N = 1)$.

   Allez chacun y va au pif de sa loi... L'invocation d'une loi binomiale nécessite deux arguments :

   - on effectue plusieurs fois **la même** expérience.
   - cette expérience suit une loi de Bernoulli (et donc de même paramètre)
   - ces expériences sont indépendantes entre elles.

   Je n'ai pas sanctionné l'absence de ces arguments car nous ne l'avons pas encore bien travaillé. Cependant je suis sidéré de voir le nombre d'étudiants qui ignore $\mathbb{P}(N = k)$ lorsque $N \sim \mathscr{B}(n, p)$... C'est une propriété basique du cours, impossible d'avoir une connaissance incomplète des trois lois du cours.

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $(X_k = p)$ est réalisé. Préciser alors la composition de l'urne A et de l'urne B à l'étape k.

   Facile, bien.

9. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte dans l'urne A au tirage 1 sachant que $N = p$?

   Il est plus rigoureux de bien préciser la composition de l'urne et de préciser que le tirage se fait de façon équiprobable.

10. Justifier que $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{p}{n}$.

    Quelques arnaques, peu de bonnes réponses mais quelques belles.

11. En déduire que $Y \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Pouvait-on intuiter ce résultat ?

    Aucune réponse complète. Question plus dure. Quelques belles tentatives cependant. L'anticipation du résultat n'est jamais bien formulé. Allez donc voir le corrigé naturellement.

12. On suppose dans cette question uniquement que n est pair. Préciser suivant la valeur de p si les évènements $(Y = 1)$ et $(N = p)$ sont indépendants ou non.

    Pas de bonnes réponses. La question est pourtant sans difficulté. Plusieurs ont bien ciblé cependant ce qu'il fallait faire.

13. Calculer la probabilité d'avoir $N = n$ sachant que l'on a obtenu une boule verte dans l'urne A au tirage 1.

    Plusieurs belles réponses, bien rédigées et justifiées. Pour $\mathbb{P}(Y = 1)$ il fallait se servir de la question 10 même si on ne l'avait pas réussie puisque le résultat était donné.

Partie 3 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$, $b_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $c_k = \mathbb{P}(X_k = 2)$.

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_k + b_k + c_k$?

    Facile, je ne m'attendais pas à si peu de réponse ! La moitié des points pour la justification « forme un système complet »

15. Préciser a_0, b_0, c_0.

    Facile lorsque l'on a réussi la question 7. Certains sans la question 7 parachutent le résultat.

16. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $(i, j) \in [\![0; 2]\!]$, préciser en justifiant $\mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$.

    Une seule bonne réponse. Non traitée sinon.

17. Déduire de la question précédente que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{k+1} = \frac{b_k}{4} \\ b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k \\ c_{k+1} = \frac{b_k}{4} \end{cases} .$$

    Aucune bonne réponse. A bien retravailler, c'est avec la question précédente THE question du problème. La plus importante, généreusement dotée. A retravailler absolument !

18. *Méthode 1.*

    (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+2} = \frac{b_{k+1} + b_k}{2}$.
    Ok plutôt bien réussie même si la rédaction est parfois un peu rapide.

    (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k et c_k.
    Très peu réussie et pourtant facile...

19. *Méthode 2.*

    (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+1} = 1 - \frac{b_k}{2}$.
    Pas trop dure non plus mais pas toujours abordée. N'oubliez pas de lire tout un sujet, quelques questions plus abordables peuvent se cacher en fin de sujet !

    (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k et c_k.
    Facile mais pratiquement aucune bonne réponse...

20. En déduire les limites des suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

    Non traitée.