Epreuve de mathématiques 9
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Variables aléatoires

Une urne (pour changer) contient $N \geqslant 2$ boules distinctes numérotées de 1 à N. On effectue successivement et avec remise des tirages dans l'urne. On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel on définit toutes nos variables aléatoires. Au tirage n, on note Z_n la variable aléatoire retournant 1 si le numéro tiré n'a jamais été pioché avant et 0 sinon. On note également Y_n le nombre de numéros **distincts** obtenus durant les n premiers tirages. On pose par convention $Y_0 = 0$ et on note que $Z_1 = Y_1 = 1$.

Partie 1 : Lois initiales

1. Déterminer la loi de Z_2.
2. Exprimer Y_2 en fonction de Z_2 et en déduire la loi de Y_2.
3. (a) Ecrire l'évènement $(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$ en fonction de Y_2 et Z_3.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$.
4. Calculer la loi conjointe de Y_2 et Y_3.
5. Vérifier que la loi marginale de Y_3 est donnée par

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y_3 = k)$	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{3(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$

6. Préciser l'espérance de Y_3.
7. Calculer la covariance de Y_2 et Y_3.
8. Les variables Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?

Partie 2 : Loi de Z_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $m = \min(n, N)$.

9. Justifier que $Y_n(\Omega) \subseteq [\![1; m]\!]$.
10. Soit $k \in [\![1; m]\!]$, calculer $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)$.
11. En déduire que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y_n)$.
12. Donner une expression de Y_n en fonction de $Z_1, \ldots, Z_n$.
13. En déduire une expression de $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1)$ en fonction de N et des $\mathbb{P}(Z_k = 1)$ pour k entre 1 et n.
14. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

Partie 3 : Autour de Y_N

15. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_n)$. Vérifier la cohérence avec la question 6.
16. Montrer que $\mathbb{E}(Y_N) \underset{N \to +\infty}{\sim} N\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n le nombre de numéros encore jamais pioché durant les étapes 1 à n.

17. Exprimer X_N en fonction de N et Y_N.
18. Justifier qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$, $\frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} \leqslant \frac{1}{2}$.
19. En déduire que pour tout $N \geqslant N_0$, $\mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) \leqslant \frac{3}{4}$.

Partie 4 : Par les fonctions génératrices

On fixe à nouveau $N \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la fonction génératrice de Y_n.

20. Préciser G_0, G_1 et G_2.
21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in [\![0; N]\!]$,
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(Y_n = k) + \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)\mathbb{P}(Y_n = k-1).$$
22. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$G_{n+1}(t) = \frac{1-t}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k \mathbb{P}(Y_n = k) + \sum_{k=0}^{N} t^{k+1}\mathbb{P}(Y_n = k).$$
23. En déduire que
$$G_{n+1}(t) = \frac{1}{N} t(1-t) G_n'(t) + tG_n(t).$$
24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(Y_n) + 1$.
25. Retrouver alors le résultat de la question 15.

Problème 2 - Intégration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est positive sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $F(0)$.
4. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.
5. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

On admet le résultat suivant (cf programme de deuxième année) :
$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) = F\left(-x^2\right) \qquad \text{et} \qquad B(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

6. Justifier que A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de A'.
7. Justifier que B est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de B'.
8. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Effectuer le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ sur $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
9. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B'(x) = -A'(x)$.
10. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F\left(-x^2\right) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$
11. Conclure en déterminant $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Bonus

A ne traiter qu'une fois le reste résolu.

On souhaite démontrer ici que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée.

12. Montrer que pour tout $t \in [0;1]$ et tout $h \in [-1;1]$,

$$\left| \mathrm{e}^{h\left(1+t^2\right)} - 1 - h\left(1+t^2\right) \right| \leqslant 2\,\mathrm{e}^2\,h^2.$$

13. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{F\left(x_0+h\right) - F\left(x_0\right)}{h} = \int_0^1 \mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

et conclure.