Commentaires du DS9
Variables aléatoires et intégration

Des éléments corrects mais une forte hétérogénéité dans la classe. Quelques-uns n'ont pas compris la modélisation du problème. La rédaction doit être encore améliorée même si des efforts sont visibles. L'intégration doit absolument être consolidée, en particulier les questions 6 et 7. La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{45}\right)^{0,9} \times 20$.

	Soin	P1p1	P1p2	P1p3	P1p4	P1	P2	Total	Note finale
Moyenne	-0,7	8	2,9	1,1	1,1	13	6	18,3	8,9
Sur		18	10	10	13	51	22	73	20

Répartition	< 6	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$\geqslant 12$
Effectif	12	5	9	3	9

Problème I - Variables aléatoires

Une urne (pour changer) contient $N \geqslant 2$ boules distinctes numérotées de 1 à N. On effectue successivement et avec remise des tirages dans l'urne. On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel on définit toutes nos variables aléatoires. Au tirage n, on note Z_n la variable aléatoire retournant 1 si le numéro tiré n'a jamais été pioché avant et 0 sinon. On note également Y_n le nombre de numéros **distincts** obtenus durant les n premiers tirages. On pose par convention $Y_0 = 0$ et on note que $Z_1 = Y_1 = 1$.

Partie 1 : Lois initiales

1. Déterminer la loi de Z_2.

   Facile et plutôt réussie. Justifiez bien le calcul de $\mathbb{P}(Z_3 = 1)$. Plusieurs confondent le paramètre et donne $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$. Bernoulli c'est avec un seul i !

2. Exprimer Y_2 en fonction de Z_2 et en déduire la loi de Y_2.

   Ok pour l'expression de Y_2 même si des justifications manquent. Beaucoup ont séché pour la loi croyant sans doute à une loi usuelle. Il suffisait juste de donner l'univers image et les probabilités associées.

3. (a) Ecrire l'évènement $(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$ en fonction de Y_2 et Z_3.

   Plutôt réussie mais pas toujours et pas toujours justifiée non plus !

   (b) En déduire $\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$.

   Certains ont parlé d'indépendance, ce qui n'était pas le cas ici. Il fallait utiliser la formule des probabilités composées.

4. Calculer la loi conjointe de Y_2 et Y_3.

   De belles réponses avec de bonnes rédactions. D'autres réponses avec le bon tableau mais sans la justification nécessaire. Certains enfin ont bloqué sur cette petite loi conjointe, à retravailler dans ce cas.

5. Vérifier que la loi marginale de Y_3 est donnée par

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y_3 = k)$	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{3(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$

   Cela permettait de vérifier un peu son résultat précédent. Beaucoup n'ont pas rédigé cette question ! Il ne suffit pas de dire « oui tout va bien, le sujet ne dit pas de bêtise ». Il faut bien entendu détailler les calculs : dire on somme sur les lignes ou colonnes ne suffit pas. La formule des probabilités totales avec son hypothèse était attendue !

6. Préciser l'espérance de Y_3.

   Bien. Quelques erreurs de calculs. Dites d'où viennent vos valeurs numériques : « d'après la question 5 ». Notamment quand vous n'avez pas résolu la question 5 !

7. Calculer la covariance de Y_2 et Y_3.

   La plupart des étudiants ne connaissent pas la formule. D'autres ne savent pas l'appliquer. Enfin personne n'a réussi à aller jusqu'au bout du calcul sans faire d'erreurs... Tristesse.

8. Les variables Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?

   Quelques-uns ont réussi à me dire l'horreur Y_2 et Y_3 indépendantes si et seulement si la covariance est nulle. Seule une implication est vraie. D'autres sont partis sur les probabilités avec des succès variés. Trop ont parachuté qu'un produit n'était pas nul sans vérifier que cela fonctionnait pour TOUTES les valeurs de N (ce qui était même faux pour plusieurs pour $N = 2$ par exemple).

Partie 2 : Loi de Z_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $m = \min(n, N)$.

9. Justifier que $Y_n(\Omega) \subseteq [\![1; m]\!]$.

   A rédiger ! Vos explications ne sont pas toujours claires.

10. Soit $k \in [\![1; m]\!]$, calculer $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)$.

    Un ensemble correct. La rédaction est parfois perfectible.

11. En déduire que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y_n)$.

    Quelques arnaques. Quelques belles réponses. Citez les questions que vous utilisez.

12. Donner une expression de Y_n en fonction de $Z_1, \ldots, Z_n$.

    Rédaction !

13. En déduire une expression de $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1)$ en fonction de N et des $\mathbb{P}(Z_k = 1)$ pour k entre 1 et n.

    Il fallait voir (et le rédiger) que puisque Z_{n+1} suit une loi de Bernoulli, $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1)$.

14. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

    Pas de bonne réponse malheureusement. Une récurrence forte était attendue.

Partie 3 : Autour de Y_N

15. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_n)$. Vérifier la cohérence avec la question 6.

    Pas énormément mais quelques bonnes réponses.

16. Montrer que $\mathbb{E}(Y_N) \underset{N \to +\infty}{\sim} N\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

    Mais lisez l'énoncé ! On ne parle pas de $\mathbb{E}(Y_n)$ mais de $\mathbb{E}(Y_N)$. Un petit calcul asymptotique malheureusement... pratiquement aucune bonne réponse.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n le nombre de numéros encore jamais pioché durant les étapes 1 à n.

17. Exprimer X_N en fonction de N et Y_N.

    Rédigez !

18. Justifier qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$, $\frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} \leqslant \frac{1}{2}$.

    Quelques essais intéressants. Question pas très dure finalement quand on a réussi ce qui précède. A bien reprendre si vous ne l'avez pas abordée.

19. En déduire que pour tout $N \geqslant N_0$, $\mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) \leqslant \frac{3}{4}$.

    Une petite inégalité de Markov. Pratiquement pas abordée. A bien reprendre!

Partie 4 : Par les fonctions génératrices

On fixe à nouveau $N \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la fonction génératrice de Y_n.

20. Préciser G_0, G_1 et G_2.

    Peu présentent la variable t !! Et d'autres n'écrivent même pas le t... Question facile mais pas si bien réussie que cela. A reprendre pour beaucoup.

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in [\![0; N]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(Y_{n+1} = k\right) = \frac{k}{N}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n = k-1\right).$$

    Puisque la formule est donnée il faut bien la justifier. Un système complet était attendu avec la formule des probabilités totales. A l'instinct, vous l'avez mais peu de réponses bien rédigées.

22. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$G_{n+1}(t) = \frac{1-t}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \sum_{k=0}^{N} t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right).$$

    Pas de bonne réponse. Pas si difficile, on utilise la question précédente et on change la variable sur la seconde somme.

23. En déduire que

$$G_{n+1}(t) = \frac{1}{N}t\left(1-t\right)G_n'(t) + tG_n(t).$$

    Ok, n'oubliez pas de justifier que la fonction est dérivable.

24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left(Y_n\right) + 1$.

    Plus de bonnes réponses ici.

25. Retrouver alors le résultat de la question 15.

    Un ou deux seulement ont vu la petite suite arithmético-géométrique. Question de fin de sujet mais... facile!

Problème II - Intégration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   J'ai mis 0 à tous ceux qui prétendent que $\frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}$ est une fonction ou qui ne me parle pas de continuité (juste de définition) ou qui me parle de continuité de la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}$ (donc j'ai mis beaucoup de 0). Il fallait simplement parler de la continuité de $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}$ sur $[0; 1]$.

2. Montrer que F est positive sur $\mathbb{R}$.

   Ok, 1/2 point en moins à tous ceux qui me parachutent une inégalité stricte après intégration.

3. Calculer $F(0)$.

   Facile, bien réussie.

4. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   Beaucoup de parachutages. Il est INTERDIT d'intervertir $\lim\limits_{x\to+\infty}$ et $\int_0^1$. Certains ont bien vu les inégalités mais on écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)} < \mathrm{e}^{2x},$$
   ce qui est archi-faux pour $x < 0$! ! !

5. Démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

   L'inégalité précédente étant faux pour $x < 0$, elle ne permet pas d'avoir la convergence et donc pas de point. Dommage car en l'adaptant au cas $x < 0$ on récupérait 2 jolis points.

On admet le résultat suivant (cf programme de deuxième année) :
$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$
On pose
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) = F\left(-x^2\right) \qquad \text{et} \qquad B(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

6. Justifier que A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de A'.

   Décevante. Il suffisait de parler de composer de deux fonctions dérivables car F l'est par hypothèse. La dérivée d'une composée pose encore beaucoup de problème à trop d'entre vous... Impossible de s'y tromper en fin de PTSI ! ! !

7. Justifier que B est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de B'.

   Pauvre théorème fondamental de l'analyse massacré joyeusement. J'ai vu beaucoup l'horreur suivante :
$$(G(x) - G(0))' = G'(x) - G'(0),$$
   depuis quand la dérivée d'un nombre fixé est non nul ? Snif.

8. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Effectuer le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ sur $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Peu de réponse correcte. Aucune difficulté, il faut absolument savoir faire un changement de variable ! Justifier que le changement est $\mathscr{C}^1$ avant de calculer $\mathrm{d}t$.

9. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B'(x) = -A'(x)$.

   Très peu de bonnes réponses car trop d'erreur dans l'une ou l'autre des questions précédentes.

10. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F\left(-x^2\right) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$
    Facile mais ne parachuter pas un C. Il faut écrire $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \ldots$. Si vous préciser que c'est parce que vous êtes sur un intervalle (sinon cela ne marche pas ! ! !) alors là je suis comblé !

11. Conclure en déterminant $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

    Allez hop l'erreur classique que je vous ai déjà signalé 100 fois de passer allègrement à la racine carrée sans justifier. Donc pour la 101-ième fois : il faut le justifier ;)