Corrigé du Devoir Surveillé 9
Variables aléatoires, intégration

Problème I - Variables aléatoires

Une urne (pour changer) contient $N \geqslant 2$ boules distinctes numérotées de 1 à N. On effectue successivement et avec remise des tirages dans l'urne. On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel on définit toutes nos variables aléatoires. Au tirage n, on note Z_n la variable aléatoire retournant 1 si le numéro tiré n'a jamais été pioché avant et 0 sinon. On note également Y_n le nombre de numéros **distincts** obtenus durant les n premiers tirages. On pose par convention $Y_0 = 0$ et on note que $Z_1 = Y_1 = 1$.

Partie 1 : Lois initiales

1. On note que Z_2 ne possède que deux issues : 0 ou 1. Donc Z_2 suit une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre. Au deuxième tirage, un numéro a déjà été pioché et remis dans l'urne. Notons A_1 ce numéro. Dès lors, pour obtenir un nouveau numéro, il faut piocher une boule parmi les $N-1$ qui n'ont pas le numéro A_1 : $N-1$ choix alors que le nombre total de boules est de N (car on a remis la boule piochée au premier tirage). Le tirage étant uniforme sur toutes les boules :

$$\mathbb{P}\left(Z_2 = 1\right) = \frac{N-1}{N}.$$

Conclusion,

$$\boxed{Z_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{N-1}{N}\right).}$$

2. On sait que lors du premier tirage on pioche forcément un nouveau numéro : $Y_1 = 1$. Puis lors du second tirage ou l'on repioche le même numéro, $Z_2 = 0$ et $Y_2 = 1$ ou l'on pioche un deuxième numéro, $Z_2 = 1$ $Y_2 = 2$. Donc $Y_2(\Omega) = \{1; 2\}$ et on note que

$$\boxed{Y_2 = Y_1 + Z_1 = 1 + Z_1.}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(Y_2 = 1\right) = \mathbb{P}\left(1 + Z_1 = 1\right) = \mathbb{P}\left(Z_1 = 0\right) = \frac{1}{N}$$
$$\mathbb{P}\left(Y_2 = 2\right) = \mathbb{P}\left(1 + Z_1 = 2\right) = \mathbb{P}\left(Z_1 = 1\right) = \frac{N-1}{N}.$$

Conclusion,

$$\boxed{Y_2(\Omega) = \{1; 2\}, \qquad \mathbb{P}\left(Y_2 = 1\right) = \frac{1}{N}, \qquad \mathbb{P}\left(Y_2 = 2\right) = \frac{N-1}{N}.}$$

3. (a) L'évènement $(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$ correspond à n'avoir pioché que un seul numéro lors des trois premiers tirages et donc d'avoir pioché le même numéro qu'au tirage 1 et 2 i.e $Y_2 = 1$ et de repiocher le même numéro au tirage 3 : $Z_3 = 0$. Ainsi,

$$\boxed{(Y_2 = 1, Y_3 = 1) = (Y_2 = 1, Z_3 = 0).}$$

(b) Par la question précédente,

$$\mathbb{P}\left(Y_2 = 1, Y_3 = 1\right) = \mathbb{P}\left(Y_2 = 1, Z_3 = 0\right) = \mathbb{P}\left(Z_3 = 0 \mid Y_2 = 1\right)\mathbb{P}\left(Y_2 = 1\right).$$

On sait que $\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{1}{N}$. De plus si $(Y_2 = 1)$, alors en deux tirages une seule boule a été tirée et il reste $N-1$ boules non tirées. Donc

$$\mathbb{P}(Z_3 = 0 \mid Y_2 = 1) = \frac{1}{N}.$$

Conclusion,

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 1) = \frac{1}{N^2}$$

4. On sait que $Y_2(\Omega) = [\![1;2]\!]$. En trois pioches, nous avons pu obtenir 1, 2 ou 3 numéros distincts. Donc $Y_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$. De même que dans les questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 2) = \mathbb{P}(Y_2 = 1, Z_3 = 1) = \mathbb{P}(Z_3 = 1 \mid Y_2 = 1)\,\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{N-1}{N}\frac{1}{N} = \frac{N-1}{N^2}.$$

$(Y_2 = 1, Y_3 = 3)$ signifie avoir eu deux fois le même numéro lors de deux premiers tirages et d'obtenir 3 numéros distincts au bout du troisième tirage. Il faudrait avoir obtenu deux numéros distincts lors du tirage 3 ce qui est impossible :

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 2) = 0.$$

En procédant de même pour les autres probabilités, on obtient :

Y_2 \ Y_3	1	2	3
1	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{N-1}{N^2}$	0
2	0	$\frac{2(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$

NB : on vérifie bien que $\frac{1}{N^2} + \frac{N-1}{N^2} + \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} = \frac{1+N-1+2N-2+N^2-3N+2}{N^2} = 1$, *OK !*

5. Puisque $(Y_2 = i)_{i \in [\![1;2]\!]}$ forme un système complet, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y_3 = 1) = \mathbb{P}(Y_3 = 1, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_3 = 1, Y_2 = 2).$$

Par la loi conjointe, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y_3 = 1) = \frac{1}{N^2} + 0 = \frac{1}{N^2}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(Y_3 = 2) = \mathbb{P}(Y_3 = 2, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_3 = 2, Y_2 = 2) = \frac{N-1}{N^2} + \frac{2(N-1)}{N^2} = \frac{3(N-1)}{N^2}$$
$$\mathbb{P}(Y_3 = 2) = \mathbb{P}(Y_3 = 3, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_3 = 3, Y_2 = 2) = 0 + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2}.$$

Conclusion, la loi marginale de Y_3 est bien donnée par $Y_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$ et

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y_3 = k)$	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{3(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$

NB : à nouveau, $\frac{1}{N^2} + \frac{3(N-1)}{N^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} = \frac{1+3N-3+N^2-3N+2}{N^2} = 1$.

6. Par définition,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_3) &= \sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}(Y_3=k)\\ &= \frac{1}{N^2}+2\frac{3(N-1)}{N^2}+3\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}\\ &= \frac{1+6N-6+3N^2-9N+6}{N^2}\\ &= \frac{3N^2-3N+1}{N^2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_3)=\frac{3N^2-3N+1}{N^2}.}$$

7. Par définition,

$$\operatorname{Cov}(Y_2,Y_3)=\mathbb{E}(Y_2Y_3)-\mathbb{E}(Y_2)\,\mathbb{E}(Y_3).$$

D'une part,

$$\mathbb{E}(Y_2Y_3)=\sum_{(i,j)\in[\![1;2]\!]\times[\![1;3]\!]} ij\mathbb{P}(Y_2=i,Y_3=j).$$

Donc d'après la loi conjointe,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_2Y_3) &= 1\times 1\times\frac{1}{N^2}+1\times 2\times\frac{N-1}{N^2}+0+0+2\times 2\times\frac{2(N-1)}{N^2}+2\times 3\times\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}\\ &= \frac{1+2N-2+8N-8+6N^2-18N+12}{N^2}\\ &= \frac{6N^2-8N+3}{N^2}.\end{aligned}$$

D'autre part, par la loi de Y_2 donnée en question 2.

$$\mathbb{E}(Y_2)=\frac{1}{N}+2\times\frac{N-1}{N}=\frac{2N-1}{N}.$$

Finalement, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(Y_2,Y_3) &= \frac{6N^2-8N+3}{N^2}-\frac{2N-1}{N}\frac{3N^2-3N+1}{N^2}\\ &= \frac{6N^3-8N^2+3N-6N^3+6N^2-2N+3N^2-3N+1}{N^3}\\ &= \frac{N^2-2N+1}{N^3}\\ &= \frac{(N-1)^2}{N^3}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\operatorname{Cov}(Y_2,Y_3)=\frac{(N-1)^2}{N^3}.$$

8. Puisque $N\geqslant 2$, par la question précédente, $\operatorname{Cov}(Y_2,Y_3)=\frac{(N-1)^2}{N^3}>0$. Donc les variables Y_2 et Y_3 ne sont pas corrélées. En particulier (on rappelle que la réciproque est fausse),

$$\boxed{\text{les variables } Y_2 \text{ et } Y_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Partie 2 : Loi de Z_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $m = \min(n, N)$.

9. Y_n désigne le nombre de nouveaux numéros obtenus lors de $n \geqslant 1$ tirages. Nécessairement, Y_n est un nombre strictement positif : $Y_n \geqslant 0$. De plus en n tirages on ne peut pas obtenir plus que n numéro : $Y_n \leqslant n$ ni plus de numéro que ne contient l'urne : $Y_n \leqslant N$. Donc $Y_n \leqslant m$. Conclusion,

$$\boxed{Y_n(\Omega) \subseteq [\![1; m]\!].}$$

10. Soit $k \in [\![1; m]\!]$. Supposons $(Y_n = k)$. Alors en n tirages nous avons obtenu exactement k numéros distincts. Il reste donc dans l'urne $N - k$ numéros non piochés et k numéros déjà piochés. Le tirage étant uniforme, la probabilité d'obtenir un nouveau numéro est alors,

$$\boxed{\forall k \in [\![1; m]\!], \qquad \mathbb{P}\left(Z_{n+1} = 1 \mid Y_n = k \right) = \frac{N-k}{N}.}$$

11. La famille $(Y_n = k)_{k \in [\![1; m]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) &= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\left(Z_{n+1} = 1 \mid Y_n = k \right) \mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(Y_n = k) && \text{par la question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Y_n = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{m} k \mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= 1 - \frac{1}{N} \mathbb{E}(Y_n).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N} \mathbb{E}(Y_n).}$$

12. Chaque Z_i compte si le tirage i a apporté un nouveau numéro ou non tandis que Y_n compte le nombre total de nouveaux numéros. Par conséquent,

$$\boxed{Y_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k.}$$

13. Par la question 11.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{N} \mathbb{E}(Y_n) \\
&= 1 - \frac{1}{N} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \right) && \text{par la question précédente} \\
&= 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) && \text{par linéarité de l'espérance.}
\end{aligned}$$

On note que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k n'a que deux issues 0 et 1. Donc Z_k suit une loi de Bernoulli. Notons p_k son paramètre. Dès lors, on sait que

$$\mathbb{E}(Z_k) = p_k = \mathbb{P}(Z_k = 1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1).}$$

14. Procédons par récurrence forte. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$ ».
Initialisation. Si $n = 1$, on a $Z_1 = 1$. Donc

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = 1.$$

D'autre part, $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^0 = 1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par la question précédente,

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1).$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k} && \text{en posant } \tilde{k} = k - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{N}\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)} && \text{car on a une somme géométrique de raison } 1 - \frac{1}{N} \neq 1 \\
&= 1 - \frac{1}{N}\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}{\frac{1}{N}} \\
&= 1 - \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.
\end{aligned}$$

On obtient bien $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(Z_n = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}.}$$

Partie 3 : Autour de Y_N

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 12. on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) && \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1) && \text{car } Z_k \text{ suit une loi de Bernoulli}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k}\\
&= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}{\frac{1}{N}}\\
&= N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{E}(Y_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

En particulier, pour $n = 3$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_3) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^3\right) = N\left[1 - \left(1 - \frac{3}{N} + \frac{3}{N^2} - \frac{1}{N^3}\right)\right]
&= N\frac{3N^2 - 3N + 1}{N^3}\\
&= \frac{3N^2 - 3N + 1}{N^2}
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 6.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_3) = \frac{3N^2 - 3N + 1}{N^2}.}$$

16. Par la question précédente,

$$\mathbb{E}(Y_N) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N\right) = N\left(1 - \mathrm{e}^{N\ln\left(1 - \frac{1}{N}\right)}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_N) &\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \mathrm{e}^{N\left(-\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}\right)\\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \mathrm{e}^{-1+o(1)}\right)\\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{o(1)}\right)\\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\left(1 + o(1)\right)\right)\\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} + o(1)\right)\\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) + o(N).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n le nombre de numéros encore jamais pioché durant les étapes 1 à n.

17. Puisque Y_N est le nombre de nouveaux numéros obtenus et X_N le nombre de numéros encore non piochés, la somme des deux donne bien le nombre de tous les numéros. On a donc

$$Y_N + X_N = N.$$

Conclusion,

$$\boxed{X_N = N - Y_N.}$$

18. Par la question précédente et la linéarité de l'espérance, pour tout $N \geqslant 2$,

$$\frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \frac{\mathbb{E}(N-Y_N)}{N} = \frac{N-\mathbb{E}(Y_N)}{N} = 1 - \frac{\mathbb{E}(Y_N)}{N}.$$

Donc par la question 16.

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = 1 - \left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} < \frac{1}{2}.$$

En posant $\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$,

$$\frac{1}{\mathrm{e}} - \varepsilon \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} + \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists N_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall N \geqslant N_0, \qquad \frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} \leqslant \frac{1}{2}.}$$

19. Soit $N \geqslant N_0$. On observe que

$$\mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) = \mathbb{P}\left(N - X_N \leqslant \frac{N}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{2N}{3} \leqslant X_N\right).$$

Par l'inégalité de Markov, car X_N est une variable aléatoire à valeurs positive,

$$\mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) = \mathbb{P}\left(X_N \geqslant \frac{2N}{3}\right) \leqslant \frac{3\mathbb{E}(X_N)}{2N}.$$

Donc par la question précédente, comme $N \geqslant N_0$,

$$\mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) \leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall N \geqslant N_0, \qquad \mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) \leqslant \frac{3}{4}.}$$

L'inégalité n'est pas formidable mais permet quand même de quantifier un peu que lorsque N devient assez grand, Y_N ne prend pas trop de petites valeurs.

Partie 4 : Par les fonctions génératrices

On fixe à nouveau $N \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la fonction génératrice de Y_n.

20. Puisque $Y_0 = 0$. On a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_0(t) = t^0 \mathbb{P}(Y_0 = 0) = 1.$$
Puisque $Y_1 = 1$,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_1(t) = t^1 \mathbb{P}(Y_1 = 1) = t.$$
Enfin, par la question 2.
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_2(t) = t\mathbb{P}(Y_2 = 1) + t^2 \mathbb{P}(Y_2 = 2) = \frac{t}{N} + \frac{(N-1)t^2}{N}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_0(t) = 1,\ G_1(t) = t,\ G_2(t) = \frac{1}{N}t + \frac{N-1}{N}t^2 = \frac{t + (N-1)\,t^2}{N}.}$$

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in [\![0; N]\!]$. Supposons $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Puisque $(Y_n = i)_{i \in [\![0;m]\!]}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = i)\, \mathbb{P}(Y_n = i).$$
Si $(Y_n = i)$ on a obtenu i numéros distincts pendant les n premiers tirages. Dans ce cas, si l'on n'obtient pas un nouveau numéro, $Y_{n+1} = Y_n = i$ et si l'on obtient un nouveau numéro, $Y_{n+1} = Y_n + 1 = i + 1$. Donc si $k \neq i$ et $k \neq i+1$,
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = i) = 0$$
Cela correspond aussi à $i \neq k$ et $i \neq k-1$. Alors,
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = k-1)\, \mathbb{P}(Y_n = k-1) + \mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = k)\, \mathbb{P}(Y_n = k).$$
Si $(Y_n = k-1)$, alors $(Y_{n+1} = k)$ correspond à avoir un nouveau numéro sachant que $k-1$ ont déjà été obtenus :
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = k-1) = \frac{N - (k-1)}{N} = 1 - \frac{k-1}{N}.$$
D'autre part, si $(Y_n = k)$, alors $(Y_{n+1} = k)$ correspond à ne pas avoir un nouveau numéro sachant que k ont déjà été obtenus :
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = k-1) = \frac{k}{N}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(Y_n = k) + \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) \mathbb{P}(Y_n = k-1).}$$
Eventuellement quelques-uns de ces évènements sont négligeables, par exemple si $k = 0$ ou $k > n$ mais la formule reste vraie.

22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition, puisque $Y_{n+1}(\Omega) \subseteq [\![1; m]\!] \subseteq [\![1; N]\!]$,
$$G_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{N} t^k \mathbb{P}(Y_{n+1} = k).$$

Là encore certains de ces évènement peuvent être négligeables. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \sum_{k=1}^{N}\left[t^k \frac{k}{N}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + t^k\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n = k-1\right)\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \sum_{k=1}^{N} t^k\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n = k-1\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \sum_{k=0}^{N-1} t^{k+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \sum_{k=0}^{N} t^{k+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \sum_{k=0}^{N} t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} kt^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \sum_{k=0}^{N} t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) \\
&= \frac{1-t}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \sum_{k=0}^{N} t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{G_{n+1}(t) = \frac{1-t}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + \sum_{k=0}^{N} t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right).}$$

23. Puisque

$$G_n(t) = \sum_{k=0}^{N} t^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right).$$

Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \frac{(1-t)\,t}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^{k-1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + t\sum_{k=0}^{N} t^k\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) \\
&= \frac{(1-t)\,t}{N}\sum_{k=1}^{N} kt^{k-1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) + tG_n(t).
\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et

$$G_n'(t) = \sum_{k=1}^{N} kt^{k-1}\mathbb{P}\left(Y_n = k\right).$$

Ainsi,

$$G_{n+1} = \frac{(1-t)\,t}{N}G_n'(t) + tG_n(t)$$

Conclusion,

$$\boxed{G_{n+1}(t) = \frac{1}{N}t\,(1-t)\,G_n'(t) + tG_n(t).}$$

24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, les fonctions G_{n+1}, G_n et G_n' étant dérivables en tant que

fonctions polynomiales,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G'_{n+1}(t) &= \frac{1}{N}\left(t-t^2\right)' G'_n(t) + \frac{1}{N} t\,(1-t)\, G''_n(t) + G_n(t) + tG'_n(t)\\ &= \frac{1}{N}(1-2t)\, G'_n(t) + \frac{1}{N} t\,(1-t)\, G''_n(t) + G_n(t) + tG'_n(t)\\ &= \left(\frac{1-2t}{N} + t\right) G'_n(t) + \frac{1}{N} t\,(1-t)\, G''_n(t) + G_n(t).\end{aligned}$$

En évaluant en 1,

$$G'_{n+1}(1) = \left(\frac{-1}{N} + 1\right) G'_n(1) + 0 + G_n(1)$$

Or par le cours, on sait que $\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right) = G'_{n+1}(1)$, $\mathbb{E}\left(Y_n\right) = G'_n(1)$ et $G_n(1) = 1$. Finalement, on obtient bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}\left(Y_n\right) + 1.}$$

25. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{E}\left(Y_n\right)$. Par la question précédente,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) a_n + 1.$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \omega + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{N}\,\omega = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = N.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - \omega = a_n - N$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - N\\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) a_n + 1 - N\\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) (b_n + N) + 1 - N\\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) b_n + N - 1 + 1 - N\\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) b_n. \end{aligned}$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n b_0 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n (a_0 - N) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \left(\mathbb{E}\left(Y_0\right) - N\right) = -N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b_n + N = N - N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

On retrouve le résultat de la question 15. (et même étendu au rang 0) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}\left(Y_n\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

Problème II - Intégration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}$ est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 > 0$. Donc $F(x)$ existe et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) \geqslant 0.}$$

3. Par définition,

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnait la dérivée de la fonction arctan :

$$F(0) = [\arctan(t)]_{t=0}^{t=1} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{F(0) = \frac{\pi}{4}.}$$

4. On observe que pour tout $t \in [0;1]$, $1+t^2 \geqslant 1$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $x\left(1+t^2\right) \geqslant x$ et

$$\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)} \geqslant \mathrm{e}^{x}.$$

Donc puisque $1+t^2 > 0$, on obtient

$$\frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+t^2}.$$

Par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad F(x) \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x}\,\frac{\pi}{4} \qquad \text{d'après la question précédente.}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}\,\frac{\pi}{4} = +\infty$. Conclusion, par le théorème de minoration,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$$

5. Pour tout $t \in [0;1]$, $1+t^2 \geqslant 1$ donc pour tout $x \leqslant 0$, $x\left(1+t^2\right) \leqslant x$. Par croissance de la fonction exponentielle, $0 \leqslant \mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)} \leqslant \mathrm{e}^{x}$. Par positivité de $1+t^2$,

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+t^2}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \qquad 0 \leqslant F(x) \leqslant \mathrm{e}^{x}\,\frac{\pi}{4}.$$

Or $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}\,\frac{\pi}{4} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.}$$

On admet le résultat suivant (cf programme de deuxième année) :

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) = F\left(-x^2\right) \qquad \text{et} \qquad B(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

6. Puisque F est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée, A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A'(x) = -2xF'\left(-x^2\right) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion, $\boxed{A \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et}}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A'(x) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.}$$

7. Posons $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental de l'analyse,

$$G : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est une primitive de g (et même l'unique primitive de g qui s'annule en 0). Alors, on observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad B(x) = G(x)^2.$$

G étant dérivable sur $\mathbb{R}$, B l'est aussi et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad B'(x) = 2G'(x)G(x) = 2g(x)G(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion, $\boxed{B \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et}}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad B'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Posons $u = \frac{t}{x}$ i.e. $t = ux$. La fonction $u \mapsto ux$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$. Lorsque $t = 0$, alors $u = 0$ et lorsque $t = x$, $u = 1$. Ainsi,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(ux)^2}\,x\,\mathrm{d}u = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-u^2x^2}\,\mathrm{d}u.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-u^2x^2}\,\mathrm{d}u.}$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question 7.

$$B'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Donc par la question précédente, si $x \neq 0$,

$$B'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-u^2x^2}\,\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t.$$

On note que si $x = 0$, $B'(0) = 0$ et donc le résultat reste encore vrai. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, B'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, par la question 6.

$$\forall x \in \mathbb{R}, -A'(x) = 2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad B'(x) = -A'(x).}$$

10. Par la question précédente, puisque $\mathbb{R}$ est un **intervalle** :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, B(x) = -A(x) + C \ \Leftrightarrow\ A(x) + B(x) = C.$$

EN particulier, en $x = 0$,

$$C = A(0) + B(0) = F(0) + 0 = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \text{par la question 3.}$$

D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) + B(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F\left(-x^2\right) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.}$$

11. Par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} - F\left(-x^2\right)}.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$, donc par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = +\sqrt{\frac{\pi}{4} - F\left(-x^2\right)}$$

On sait par la question 5. que $\lim\limits_{u \to -\infty} F(u) = 0$. Donc par composition,

$$\lim_{x \to +\infty} F\left(-x^2\right) = \lim_{u \to -\infty} F(u) = 0.$$

La fonction racine carrée étant continue en $\frac{\pi}{4}$, on en déduit que $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$ donnée par

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Conclusion, on obtient la demi-intégrale de Gauss

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Bonus

A ne traiter qu'une fois le reste résolu.

On souhaite démontrer ici que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée.

12. Pour tout $t \in [0;1]$ et tout $h \in [-1;1]$, posons $u = h\left(1+t^2\right)$. On observe que $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$ donc $-2 \leqslant u \leqslant 2$. La fonction exponentielle est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-2;2]$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $u \in [-2;2]$,

$$\left|\exp(u) - exp(0) - u\exp'(0)\right| \leqslant \sup_{z\in[0;u] \text{ ou } [u;0]} \left|\exp''(z)\right| \frac{|u|^2}{2}.$$

Autrement dit,

$$\left|\mathrm{e}^u - 1 - u\right| \leqslant \sup_{z\in[0;u] \text{ ou } [u;0]} \mathrm{e}^z \frac{u^2}{2} \leqslant \sup_{z\in[-2;2]} \mathrm{e}^z \frac{u^2}{2} = \mathrm{e}^2 \frac{u^2}{2}.$$

En posant $u = h\left(1+t^2\right) \in [-2;2]$, on obtient,

$$\left|\mathrm{e}^{h\left(1+t^2\right)} - 1 - h\left(1+t^2\right)\right| \leqslant \mathrm{e}^2 \frac{h^2\left(1+t^2\right)^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^2 \frac{4h^2}{2} = 2\,\mathrm{e}^2 h^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in [0;1]\,,\ \forall h \in [-1;1]\,, \qquad \left|\mathrm{e}^{h\left(1+t^2\right)} - 1 - h\left(1+t^2\right)\right| 2\,\mathrm{e}^2 h^2.}$$

13. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $h \in [-1;1] \setminus \{0\}$. Posons,

$$D = \frac{F\left(x_0+h\right) - F\left(x_0\right)}{h} - \int_0^1 \mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$$

Par définition de F,

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{h}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(x_0+h)\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) - \int_0^1 \mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{h\left(1+t^2\right)} \mathrm{e}^{h\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{h\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{h\left(1+t^2\right)}\left[\mathrm{e}^{h\left(1+t^2\right)} - 1\right] - \mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{h\left(1+t^2\right)}\left[\mathrm{e}^{h\left(1+t^2\right)} - 1 - h\left(1+t^2\right)\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire car les bornes sont dans le bon sens,

$$|D| \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{h\left(1+t^2\right)}\left|\mathrm{e}^{h\left(1+t^2\right)} - 1 - h\left(1+t^2\right)\right|\mathrm{d}t.$$

Par la question précédente, pour tout $t \in [0;1]$,

$$\frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{h\left(1+t^2\right)}\left|\mathrm{e}^{h\left(1+t^2\right)} - 1 - h\left(1+t^2\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{h\left(1+t^2\right)} 2\,\mathrm{e}^2 h^2\,\mathrm{d}t.$$

Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$|D| \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}}{h\left(1+t^2\right)} 2\,\mathrm{e}^2 h^2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e}^2 h \underbrace{F\left(x_0\right)}_{\text{indépendant de } h}.$$

Ceci étant vrai pour tout $h \in [-1;1] \setminus \{0\}$ et comme $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} 2\,\mathrm{e}^2\, hF(x_0) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} |D| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} D = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \int_0^1 \mathrm{e}^{x_0\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.}$$

En en conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.}$$