Correction Hiver 01
Continuité-dérivabilité

Solution de l'exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^n \neq 1$ et donc u_n existe. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. On observe aussi que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n^2 u_n = \frac{n^3}{\mathrm{e}^n - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{\mathrm{e}^n} \qquad \text{car } 1 \ll n \to +\infty \, \mathrm{e}^n.$$

Donc par croissance comparée,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{\mathrm{e}^n} = 0.$$

Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0$,

$$0 \underset{(\text{car } u_n > 0)}{<} n^2 u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit directement que f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la continuité en 0. On sait que $f(0) = 1$. Calculons la limite quand $x \to 0$, $x \neq 0$. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x).$$

Donc

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Par quotient d'équivalents, on obtient que

$$f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Autrement dit

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1 = f(0).$$

Donc la fonction f est continue en 0.
Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

NB : on pouvait reconnaitre le taux d'accroissement de la fonction exponentielle pour dire que $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \to \exp'(0) = 1$ *quand* $x \to 0$ *et que par passage à l'inverse,* $f(x) \to 1$ *quand* $x \to 0$.

2. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Etudions le comportement de f en 0. On souhaite appliquer le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a de plus

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x (1-x) - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.$$

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x (1-x) - 1 &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)(1-x) - 1 \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - x - x^2 + o\left(x^2\right) - 1 \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{e}^x (1-x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

De plus $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et donc par élévation au carré $(\mathrm{e}^x - 1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Ainsi par quotient d'équivalents,

$$f'(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Autrement dit $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe et vaut $-1/2$.

Des deux points précédents, on en déduit à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, que f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et de plus $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 donc

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$