Correction Hiver 02
Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1 Puisque $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\ll} 4 \underset{n\to+\infty}{\ll} n^3$. Donc $n^3+4+\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$. Par passage à l'inverse :

$$u_n = \frac{1}{n^3+4+\frac{1}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$. Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^3} > 0$. Donc par le théorème des équivalents de séries numériques à termes positifs, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-5\\7\end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-6\\9\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Les deux vecteurs $v_1 = (1,-1,2)$ et $v_2 = (0,2,-3)$ n'étant pas colinéaires la famille (v_1,v_2) est libre et donc

$$\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = \operatorname{rg}(v_1,v_2) = \operatorname{Card}(v_1,v_2) = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = 2.}$$

2. Puisque $F = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Par définition du rang,

$$\dim(F) = \dim(\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)) = \operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3).$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{\dim(F) = 2.}$$

3. On observe les points suivants :
   - $G \subseteq \mathbb{R}^3$ par définition.
   - Si $u = (x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $x = y = z = 0_{\mathbb{R}}$ est donc $x+y+z = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $0_{\mathbb{R}^3} \in G$.

- Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $(u,v)\in G^2$. Notons $u=(x,y,z)$, $v=(x',y',z')$ et $w=(x'',y'',z'')=\lambda\, u+\mu v$. Montrons que $w\in G$. On a

$$w=\begin{bmatrix}x''\\y''\\z''\end{bmatrix}=\lambda\, u+\mu v=\begin{bmatrix}\lambda\, x+\mu x'\\\lambda\, y+\mu y'\\\lambda\, z+\mu z'\end{bmatrix}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}x''=\lambda\, x+\mu x'\\y''=\lambda\, y+\mu y'\\z''=\lambda\, z+\mu z'\end{cases}.$$

  Donc

$$x''+y''+z''=\lambda\, x+\mu x'+\lambda\, y+\mu y'+\lambda\, z+\mu z'=\lambda\underbrace{(x+y+z)}_{=0\text{ car }u\in G}+\mu\underbrace{(x'+y'+z')}_{=0\text{ car }v\in G}=0.$$

  Donc $w\in G$ et G est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{G\text{ est un sous-espace vectoriel de }\mathbb{R}^3.}$$

4. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$u\in G\qquad\Leftrightarrow\qquad x+y+z=0\qquad\Leftrightarrow\qquad x=-y-z\qquad\Leftrightarrow\qquad u=\begin{bmatrix}-y-z\\y\\z\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Donc

$$G=\mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_G}.$$

NB : cela démontre également que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Donc $\mathscr{B}_G$ engendre G. De plus $\mathscr{B}_G$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_G=\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\text{ est une base de }G.}$$