Correction Hiver 03
Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1 On sait que $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Donc $2\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$. D'autre part,

$$1-\cos\left(\frac{2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\left(1-\frac{4}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^4}.$$

Donc par quotient,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2/n^3}{2/n^4} = n.$$

Donc en particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Posons pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x=\frac{\pi}{3}+h$ i.e. $h=x-\frac{\pi}{3} \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow} 0$. Pour tout $h\in\mathbb{R}$, on a

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(h)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(h)\right) = \cos(h)-\sqrt{3}\sin(h).$$

Or

$$\cos(h) \underset{h\to 0}{=} 1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}+o\left(h^4\right)$$
$$\sin(h) \underset{h\to 0}{=} h-\frac{h^3}{6}+o\left(h^4\right)$$

Par conséquent,

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \underset{h\to 0}{=} 1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}+o\left(h^4\right)-\sqrt{3}h+\sqrt{3}\frac{h^3}{6}+o\left(h^4\right) \underset{h\to 0}{=} 1-\sqrt{3}h-\frac{h^2}{2}+\frac{\sqrt{3}h^3}{6}+\frac{h^4}{24}+o\left(h^4\right).$$

Conclusion, en revenant à $x=\frac{\pi}{3}+h\to\frac{\pi}{3}$, on a

$$\boxed{2\cos(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} 1-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2}+\frac{\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{6}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4}{24}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right).}$$

2. On a vu dans la question précédente que

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \underset{h\to 0}{=} 1-\sqrt{3}h-\frac{h^2}{2}+\frac{\sqrt{3}h^3}{6}+\frac{h^4}{24}+o\left(h^4\right).$$

En particulier,

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \underset{h\to 0}{=} 1-\sqrt{3}h-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)$$

i.e.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-1+\sqrt{3}h \underset{h\to 0}{=} -\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-1+\sqrt{3}h}{h^2} = -\frac{1}{2}+o\left(1\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-1+\sqrt{3}h}{h^2} = -\frac{1}{2}.}$$