Exercice Hiver 04
Polynômes

Solution de l'exercice 1 On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e}^{n \ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} - \frac{1}{n^n}$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)} - \frac{1}{n^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)} - \frac{1}{n^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \left(\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{n^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) \qquad \text{car } \frac{1}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\longleftrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. *Méthode 1.* On rappelle que $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Donc par factorisation par l'angle moitié,

$$1 + j = 1 + \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$

   Méthode 2. On rappelle que $1 + j + j^2 = 0$ donc $1 + j = -j^2 = -\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Attention à cause du moins devant, ce n'est pas une forme polaire. On a plutôt,

$$1 + j = \mathrm{e}^{i\pi}\, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{1 + j = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a les équivalences suivantes :

$$j \text{ est une racine de } \left(1 + X^4\right)^n - X^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + j^4\right)^n - j^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + j^4\right)^n = j^n.$$

   Or, puisque j est une racine troisième de l'unité, $j^4 = j^3 \times j = j$. Donc

$$j \text{ est une racine de } \left(1 + X^4\right)^n - X^n \quad \Leftrightarrow \quad (1 + j)^n = j^n.$$

   Si $n = 0$ alors j est bien une racine de $(1 + X^4)^n - X^n = 1 - 1 = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Supposons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
& j \text{ est une racine de } \left(1 + X^4\right)^n - X^n \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], \quad 1 + j = j\, \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], \quad \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\, \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], \quad \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], \quad \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], \quad \frac{5\pi}{3} = \frac{2k\pi}{n} \qquad \text{car } \frac{5\pi}{3} \in [0\,;\, 2\pi[\text{ et } \frac{2k\pi}{n} \in [0\,;\, 2\pi[\\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], \quad 5n = 6k.
\end{aligned}$$

Donc 6 divise $5n$, or 6 et 5 sont premiers entre eux donc par le lemme de Gauss, 6 divise n. Réciproquement, si 6 divise n, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ (car $n \neq 0$) tel que $n = 6p$. Alors $5n = 30p = 6k \Leftrightarrow k = 5p \in [\![0\,;\,6p]\!]$.

On remarque que si $n = 0$ alors cette condition est encore vraie. Conclusion,

$$\boxed{j \text{ est une racine de } \left(1+X^4\right)^n - X^n \qquad \Leftrightarrow \qquad n \text{ est divisible par } 6.}$$

3. Supposons que 6 divise n. Alors par la question précédente, j est une racine de $P = (1+X^4)^n - X^n$. Or P est à coefficients réels donc $\overline{j} = j^2$ est aussi une racine de P. Puisque $j^2 \neq j$, on en déduit que $\boxed{(X-j)(X+j) = X^2+X+1 \text{ divise } P \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$ *NB : Par la question précédente, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que*
$$P = Q\left(X^2+X+1\right).$$
On note alors par passage au conjugué que (en posant pour $\overline{P}$ le polynôme P dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de P sans toucher aux X^k !)
$$\overline{P} = \overline{Q}\overline{(X^2+X+1)} \qquad \Leftrightarrow \qquad P = \overline{Q}\left(X^2+X+1\right) \qquad \textit{car } P \in \mathbb{R}[X].$$
Donc par unicité de la division euclidienne (ici le reste est nul mais c'est toujours une division euclidienne), on en déduit que $\overline{Q} = Q$. Notons $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, où $d = \deg(Q)$. Alors
$$\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$
Donc par unicité des coefficients d'un polynôme, pour tout $k \in [\![0\,;\,d]\!]$, $a_k = \overline{a_k}$ i.e. $a_k \in \mathbb{R}$. D'où $Q \in \mathbb{R}[X]$. D'où,
$$P = Q\left(X^2+X+1\right), \qquad Q \in \mathbb{R}[X].$$
Conclusion, $\boxed{X^2+X+1 \textit{ divise } P \textit{ dans } \mathbb{R}[X]}$.