Exercice Hiver 05
Suites numériques

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Exercice 2 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Justifier que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Justifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $2xy \leqslant x^2 + y^2$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
4. En déduire la monotonie de chacune des suites.
5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite PUIS en déduire que les deux suites sont adjacentes.