Correction Hiver 05
Suites numériques

Solution de l'exercice 1 Par récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Conclusion, par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) \qquad : \qquad \text{« } u_n \text{ et } v_n \text{ existent et sont positifs. »}$$

Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = a$ et $v_0 = b$ existent et sont strictement positifs. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons alors $\mathscr{P}(n+1)$. Par l'hypothèse de récurrence, u_n et v_n existent et sont positifs. Donc $u_nv_n \geqslant 0$ donc $\sqrt{u_nv_n}$ existe et est positif i.e. u_{n+1} existe et est positif. De même, il est alors évident que $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ existe et qu'il est positif. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ étaient bien définies}}$. Mieux : on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad v_n \geqslant 0.$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$2xy \leqslant x^2+y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant x^2-2xy+y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant (x-y)^2 \qquad \text{ce qui est toujours vrai.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2xy \leqslant x^2 + y^2.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = \sqrt{u_n}$ et $y = \sqrt{v_n}$, bien définis car $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ d'après la question 1. Par la question précédente, on obtient que

$$2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} \leqslant u_n + v_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{u_nv_n} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{n+1} \leqslant v_{n+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (en posant $\tilde{n} = n - 1$) $u_n \leqslant v_n$. Or on sait aussi que $u_0 = a < b = v_n$. L'inégalité est donc vraie également pour $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a $u_n \leqslant v_n$. Donc par positivité de u_n, on a $u_n^2 \leqslant u_nv_n$ puis par croissance de la fonction racine carrée,

$$u_n = \sqrt{u_n^2} \leqslant \sqrt{u_nv_n} = u_{n+1} \qquad \text{car } u_n \geqslant 0.$$

De même, $u_n \leqslant v_n$ implique que

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant \frac{v_n + v_n}{2} = v_n.$$

Ces assertions étant vraies pour $n \in \mathbb{N}$, quelconque, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

5. On a montré dans les questions précédentes que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$. Donc par ces monotonies :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_0 \geqslant v_n \geqslant u_n \geqslant u_0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 donc par le théorème de la convergence monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. De la même façon, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 (ou même 0 d'après la question 1). Donc elle converge. Notons ℓ' sa limite. Alors par passage à la limite dans l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, on a

$$\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\ell' = \ell + \ell' \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell' = \ell.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les deux suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent et leur limite est commune.}}$$

On a donc démontré que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Par la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. Donc par différence,

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \ell - \ell = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$$

On en déduit ***a posteriori*** *que les deux suites sont alors adjacentes. Nous ne pouvions montrer l'adjacence directement sans montrer que les suites convergent. Ce n'est donc pas le résultat que l'on pouvait utiliser mais sa démonstration, car les idées sont ici les mêmes que dans la démonstration du cours.*