Correction Hiver 06
Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1 Pour tout $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$. Donc la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ est bien définie. Par croissance comparée, on a

$$nu_n = \frac{n}{\ln^3(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$nu_n \geqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \geqslant \frac{1}{n} > 0 \qquad \text{car } n > 0.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 2} u_n \text{ diverge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& u \in F \cap G \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists\,(a,b,c)\,,\ u = au_1 + bu_2 + cu_3 = \begin{bmatrix} a+b-c \\ -a+b-5c \\ 2a-b+7c \end{bmatrix} \\ x+y+z = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ u = \begin{bmatrix} a+b-c \\ -a+b-5c \\ 2a-b+7c \end{bmatrix} \\ 0 = a+b-c-a+b-5c+2a-b+7c = 2a+b+c \ \Leftrightarrow\ c = -2a-b \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = \begin{bmatrix} a+b-(-2a-b) \\ -a+b-5\,(-2a-b) \\ 2a-b+7\,(-2a-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+2b \\ 9a+6b \\ -12a-8b \end{bmatrix} = 3a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + 2b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où

$$F \cap G = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{Vect} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right)}_{= \mathscr{B}_{F \cap G}} \qquad \text{car } C_1 = C_2.$$

La famille $\mathscr{B}_{F \cap G}$ engendre $F \cap G$ et est libre car composée d'un seul vecteur non nul. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_{F \cap G} \text{ est une base de } F \cap G \text{ et donc } \dim(F \cap G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_{F \cap G}) = 1.}$$

2. On sait par l'exercice de révisions Hiver 02 que $\dim(F) = 2$ et que $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Donc $\dim(G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = 2$. Par la formule de Grassmann, on en déduit de la question précédente que

$$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Or par définition $E + F \subseteq \mathbb{R}^3$. De plus, comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(E+F)$, on en déduit que

$$\boxed{E + F = \mathbb{R}^3.}$$

3. Puisque $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on en déduit que F et G ne sont pas en somme directe et donc a fortiori,

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ ne sont pas supplémentaires.}}$$