



## Correction Hiver 07

### Continuité-dérivabilité

**Solution de l'exercice 1** Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , par la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit notamment que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ . Par conséquent,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \quad f(n) \leq 1.$$

De plus par hypothèse,  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$ . Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) \geq 0$ . Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq f(n) \leq 1.$$

Par suite, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^{3/2} > 0$ ,

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n = \frac{f(n)}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Or  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$  converge en tant que série de Riemann d'exposant  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ . Conclusion, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}$$

### Solution de l'exercice 2

1. On observe que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} && \text{car } f(0) = 0 \\ &= f'(0) && \text{car on reconnaît le taux d'accroissement de } f \text{ en } 0^+ \text{ et } f \text{ est dérivable en } 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$  existe. Conclusion,

$$g \text{ est prolongeable par continuité.}$$

De plus, en notant encore

$$g : \quad [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in ]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

alors  $g$  est continue et

$$g(0) = 0.$$

2. Par la question précédente, la fonction  $g$  est continue sur  $[0; 1]$  et comme  $f$  est dérivable sur  $]0; 1]$ , on en déduit que  $g$  est dérivable sur  $]0; 1]$  comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc  $g$  est notamment dérivable sur  $]0; 1[$ . Enfin, on a  $g(0) = 0$  et

$$g(1) = \frac{f(1)}{1} = 0.$$



Donc  $g$  est continue sur  $[0; 1]$ , dérivable sur  $]0; 1[$  et  $g(0) = g(1)$ . D'après le théorème de Rolle, on conclut que

$$\boxed{\exists c \in ]0; 1[, \quad g'(c) = 0.}$$

3. Soit  $\mathcal{T}$  la tangente à la courbe  $f$  en  $c$ . Puisque  $f$  est dérivable en  $c \in ]0; 1[$ ,  $\mathcal{T}$  a pour équation

$$\mathcal{T} : \quad y = f'(c)(x - c) + f(c).$$

Or par la question précédente,  $g'(c) = 0$ . De plus pour tout  $x \in ]0; 1]$ , on a

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}.$$

Donc

$$g'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c)c - f(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(c) = f'(c)c.$$

Ainsi,

$$\mathcal{T} : \quad y = f'(c)(x - c) + f'(c)c = f'(c)(x - c + c) = f'(c)x.$$

Conclusion,

$\mathcal{T}$ , la tangente à la courbe représentative de  $f$  en  $c$ , est une droite qui passe bien par l'origine.