



## Exercice Hiver 08

### Espaces vectoriels

**Exercice 1** Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ .

**Exercice 2** On pose  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose

$$F = \{P(A) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid P \in \mathbb{R}[X]\} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists P \in \mathbb{R}[X], M = P(A)\}.$$

1. Déterminer les puissances de  $N$ .
2. En déduire les puissances de  $A$ .
3. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
4. Soit  $G = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$ .
  - (a) Montrer que  $G \subseteq F$ .
  - (b) Montrer que  $F = G$ .