Correction Hiver 08
Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1 Appliquons la règle du n^2. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{2^n} = 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant n^2 u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad\qquad \text{car } n \neq 0.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Conclusion, par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = O_3.$$

Puis, pour tout $n \geqslant 3$, $N^n = O_3$. Conclusion,

$$\boxed{N^0 = I_3,\ N^1 = N,\ N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \forall n \geqslant 3,\ N^n = O_3.}$$

2. On observe que $A = I_3 + N$. De plus N et I_3 commutent. Donc par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2, \qquad A^n = (I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{2} N + \binom{n}{2} N^2 + O_3 \qquad\qquad \text{car } n \geqslant 2 \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On observe que cette formule reste vraie si $n = 0$ et si $n = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. On a les points suivants :
   - $F \subseteq \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.
   - Si $M = O_3$. Alors en prenant $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, on a bien $M = P(A)$. Donc $O_3 = M \in F$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(M_1, M_2) \in F^2$. Puisque $M_1 \in F$, alors il existe $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M_1 = P_1(A)$. De même il existe $P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M_2 = P_2(A)$. Posons $M_3 = \lambda M_1 + \mu M_2$. Alors,

$$M_3 = \lambda P_1(A) + \mu P_2(A).$$

Posons $P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2$. Alors $P_3 \in \mathbb{R}[X]$ et

$$M_3 = P_3(A).$$

Donc $\lambda M_1 + \mu M_2 = M_3 \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

4. (a) Posons $P = 1 \in \mathbb{R}[X]$. Alors, $P(A) = I_3$ et donc $I_3 \in F$. Puisque $A = I_3 + N$, on a $N = A - I_3$. Posons $P = X - 1$, alors $N = P(A) \in F$. Enfin, par la question 2, avec $n = 2$, nous avons aussi

$$\begin{aligned} & A^2 = I_3 + 2N + \frac{2(2-1)}{2} N^2 = I_3 + 2N + N^2 \\ \Leftrightarrow \quad & N^2 = A^2 - 2N - I_3 = A^2 - 2(A - I_3) - I_3 = A^2 - 2A + 2I_3. \end{aligned}$$

Posons $P = X^2 - 2X + 2$, alors $N^2 = P(A) \in F$.
Nous aurions aussi pu constaté que $A^2 \in F$ (en prenant $P = X^2$), puis $N^2 = A^2 - I_3 - 2N \in F$ car F est stable par combinaisons linéaires.
Donc I_3, N et N^2 sont des vecteurs de F. Or F est un espace vectoriel, donc est stable par combinaisons linéaires et donc

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(I_3, N, N^2\right) \subseteq F.}$$

On rappelle que G est le plus petit espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs I_3, N et N^2.

(b) Soit $M \in F$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$M = P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

Donc par la question 2,

$$M = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\left(I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2\right)}_{\in G}.$$

Or G est stable par combinaisons linéaires en tant que sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (en tant qu'espace engendré). Donc $M \in G$. Ceci étant vrai pour $M \in F$ quelconque. D'où $F \subseteq G$. Or par la question précédente, $G \subseteq F$. Conclusion,

$$\boxed{F = G = \mathrm{Vect}\left(I_3, N, N^2\right).}$$