Correction Hiver 09
Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

Or $(1+u)^{1/2} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}+o(u)$. Donc en posant $u=\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

D'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{3/2}}.$$

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{4n^{3/2}}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$. Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{3/2}}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4n^{3/2}} > 0$. Donc par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$. Procédons par double inclusion. Soit $y\in f(A\cap B)$. Par définition, il existe $x\in A\cap B$ tel que $y=f(x)$. Puisque $x\in A\cap B$, alors $x\in A$. Ainsi $y=f(x)$ est l'image d'un élément de $x\in A$. Donc $y\in f(A)$. De même puisque $x\in A\cap B$, alors $x\in B$ et donc $y=f(x)$ est l'image d'un élément de $x\in B$. Donc $y\in f(B)$. Par conséquent, $y\in f(A)\cap f(B)$. Ceci étant vrai pour tout $y\in f(A\cap B)$, on a démontré que $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.
Réciproquement, montrons que $f(A)\cap f(B)\subseteq f(A\cap B)$. Soit $y\in f(A)\cap f(B)$, alors $y\in f(A)$ et $y\in f(B)$ donc il existe $x_1\in A$ et $x_2\in B$ tels que $y=f(x_1)$ et $y=f(x_2)$. En particulier $f(x_1)=f(x_2)$. Or f est injective donc $\underbrace{x_1}_{\in A} = \underbrace{x_2}_{\in B}$. Donc $x_1\in A\cap B$. Ainsi y est l'image d'un élément de $A\cap B$ et donc $y\in f(A\cap B)$.
Finalement $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ et donc

$$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B).$$

Conclusion,

$$\forall (A,B)\in\mathscr{P}(E)^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B).$$

NB : on peut aussi démontrer que si cette assertion est vraie alors f est injective : EXO !