Correction Hiver 10
Polynômes

Solution de l'exercice 1 Appliquons la règle du n^2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n^2 u_n = \mathrm{e}^{2\ln(n)}\,\mathrm{e}^{n}\,\mathrm{e}^{-n\ln(n)} = \mathrm{e}^{-n\ln(n)+n+2\ln(n)}.$$

Or pour tout $n \geqslant 2$,

$$-n\ln(n) + n + 2\ln(n) = -n\ln(n)\left(1 - \frac{1}{\ln(n)} - \frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Donc par composée de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{u\to-\infty} \mathrm{e}^{u} = 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant n^2 u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{car } n^2 \neq 0.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Conclusion, par le théorème de comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et notons $n = \deg(P)$. Dès lors, $\deg\left(P\left(X^2\right)\right) = 2n$ et $\deg\left(\left(X^2+1\right)P(X)\right) = 2+n$. Ainsi, si P est solution de (E) alors nécessairement $2n = 2+n$ i.e. $n = 2$. Donc $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) est inclus dans $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad a_2X^4 + a_1X^2 + a_0 = \left(X^2+1\right)\left(a_2X^2 + a_1X + a_0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad a_2X^4 + a_1X^2 + a_0 = a_2X^4 + a_1X^3 + (a_0+a_2)X^2 + a_1X + a_0.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme :

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = a_2 \\ 0 = a_1 \\ a_1 = a_0 + a_2 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = a_0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = -a_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad P = a_2X^2 - a_2 = a_2\left(X^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ a_2\left(X^2-1\right) \,\middle|\, a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(X^2 - 1\right).}$$