



## Exercice Hiver 11

### Suites numériques

**Exercice 1** On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

On pose également  $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et à valeurs dans  $U = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ .
2. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$  est  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -lipschitzienne sur  $U = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ .
3. Montrer que  $f$  possède un unique point fixe dans  $U$ .
4. Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et donner sa limite.
5. Déterminer la nature de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n - 1|$ .

*Vous pensiez pouvoir échapper aux séries numériques aujourd'hui ??*