Correction Hiver 12
Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1 La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue et croissante sur $[1;+\infty[$. Donc par le théorème d'encadrement série-intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_{t=1}^{t=n} &= n\ln(n) - n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n) \\
\int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_{t=2}^{t=n+1} &= (n+1)\ln(n+1) - n - 1 - 2\ln(2) + 2 \\
&= n\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1 \\
&= n\ln(n) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).
\end{aligned}$$

Donc par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).}$$

NB : puisque $(\ln(k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 (mais vers $+\infty$) on pouvait voir dès le départ que la série diverge grossièrement et donc diverge.

Solution de l'exercice 2

1. On a vu que $\mathscr{B}_F = (I_3, N, N^2)$ est une famille génératrice de F. Montrons que $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Montrons que $\mathscr{B}_F$ est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_0\, I_3 + \lambda_1\, N + \lambda_2\, N^2 = O_3.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & 2\,\lambda_2 \\ 0 & \lambda_0 & 2\,\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = O_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Or $\mathscr{B}_F$ est génératrice de F. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Conclusion,

$$\boxed{\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 3.}$$

2. On observe que la famille $\mathscr{B}_F$ est échelonnée en ses coordonnées mais qui lui manque des pivots en coordonnées (i,j) pour tout $(i,j) \in [\![2;3]\!] \times [\![1;3]\!]$. Posons pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ n'ayant que des 0 sauf en coordonnées (i,j) où le coefficient vaut 1. Posons

$$\mathscr{B}_G = (E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_G).$$

Posons enfin $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Les opérations élémentaires ne modifiant pas le rang, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\mathscr{B}) &= \operatorname{rg}\left(I_3, N, N^2, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 2E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}\right) \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_5 - C_9 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 2C_6 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{2}C_3 \end{array}.
\end{aligned}$$

On reconnait la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui est donc libre et donc son rang vaut son cardinal. D'où

$$\operatorname{rg}(\mathscr{B}) = 9.$$

Puisque $\operatorname{rg}(\mathscr{B}) = \operatorname{Card}(\mathscr{B})$, on en déduit que $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\operatorname{rg}(\mathscr{B}) = \dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))$ donc $\mathscr{B}$ est aussi génératrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Enfin, on observe que $\mathscr{B}_G$ engendre G et est libre en tant que sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est libre. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G.
Ainsi,

- $\mathscr{B}_F$ est une base de F,
- $\mathscr{B}_G$ est une base de G,
- $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{G = \operatorname{Vect}\left(E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}\right) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

NB : on peut aussi écrire que $G = \left\{ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;3]\!]^2} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; a_{1,1} = a_{1,2} = a_{1,3} = 0 \right\}$.