# Correction Noël 01
# Calcul d'intégrales

**Solution de l'exercice 1** Puisque $2+\arctan(x)>0$ au voisinage de 0, la fonction $f$ est bien définie et même $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0 donc admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. De plus,

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right).$$

Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(2+x+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right).$$

On sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) = \frac{x}{2} + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + o\left(x^2\right)$.
- *Méthode 1.*
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(\frac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right).$$
*Méthode 2.* Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, alors $u(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$ i.e. $u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)$.
- Enfin,
$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln(1+u(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) \quad + \frac{x}{2} \qquad\qquad + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{x^2}{8} \quad + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right).}$$

**Solution de l'exercice 2** La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc notamment sur $[1;4]$ donc $I$ existe. Posons pour tout $t\in[1;4]$, $s=\sqrt{t}$ i.e. $t=s^2$. La fonction $s\mapsto s^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ et $\mathrm{d}t = 2s\,\mathrm{d}s$. Donc par le théorème de changement de variable

$$I = \int_1^2 \mathrm{e}^s\, 2s\,\mathrm{d}s = 2\int_1^2 s\,\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s.$$

Posons,

$$\forall s\in[1;2[\,,\qquad \begin{cases} u(s) = \mathrm{e}^s \\ v(s) = s \end{cases}.$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall s\in[1;2[\,,\qquad \begin{cases} u'(s) = \mathrm{e}^s \\ v'(s) = 1 \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties,

$$I = 2\left([s\,\mathrm{e}^s]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s\right) = 2\left(2\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1 - \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1\right)\right) = 2\,\mathrm{e}^2\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 2\,\mathrm{e}^2\,.}$$