Correction Noël 02
Calcul dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 1 La fonction cos est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$. Donc la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ qui est un voisinage de 0. Notamment f est $\mathscr{C}^3$ au voisinage de 0 donc par la formule de Taylor-Young, admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$. Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^{1/2}.$$

Posons $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$.
- Puis,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$
- Enfin,
$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Or $(1+u)^{1/2} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2 + o\left(u^2\right)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \tfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^{1/2} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{x^2}{4} \quad + o\left(x^3\right) \\ &\qquad\qquad\quad + o\left(x^3\right) \\ &\qquad\qquad\quad + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right).}$$

NB : il était important de bien aller à l'ordre u^2 dans le DL de $(1+u)^{1/2}$. En effet, de l'ordre u aurait amener $o(u) \underset{x\to 0}{=} o\left(-\frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$ qui est prépondérant devant $o\left(x^3\right)$ et ne permet donc pas de conclure. Erreur subtile mais courante...

Solution de l'exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \\ 2x - 6 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \geqslant 0 \\ x > 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x \geqslant 2 \ \text{ OU } x \leqslant 1) \\ x > 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x > 3. \end{aligned}$$

Fixons désormais $x > 3$. On a alors,

$$\begin{aligned} (I) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 3x + 2} < 2x - 6 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 < (2x-6)^2 \qquad \text{car } x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \text{ et } 2x - 6 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 < 4x^2 - 24x + 36 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < 3x^2 - 21x + 34. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = 21^2 - 4 \times 3 \times 34 = 3\,(7 \times 21 - 4 \times 34) = 3\,(147 - 136) = 3 \times 11 > 0.$$

Donc les racines associées sont $r_1 = \frac{21-\sqrt{33}}{6}$ et $r_2 = \frac{21+\sqrt{33}}{6}$. Donc

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x < r_1 \ \text{OU} \ x > r_2.$$

Or

$$r_1 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 21 - \sqrt{33} > 18 \quad \Leftrightarrow \quad 3 > \sqrt{33} \text{ faux.}$$

Et

$$r_2 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 21 + \sqrt{33} > 18 \text{ vrai.}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left] \frac{21+\sqrt{33}}{6} ; +\infty \right[.}$$