



Correction Noël 03

Equations différentielles d'ordre 1

Solution de l'exercice 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{x^2}{x+x^2} = \frac{x}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + x^3 + o(x^3).$$

Posons $u(x) = x - x^2 + x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$. Dès lors,

- $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + x^3 + o(x^3)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} (x - x^2 + x^3 + o(x^3)) (x - x^2 + x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \begin{array}{l} x^2 - x^3 + o(x^3) \\ -x^3 + o(x^3) \\ + o(x^3) \end{array} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - 2x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

- *Méthode 1.*

$$u(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} u(x)^2 u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x^2 - 2x^3 + o(x^3)) (x - x^2 + x^3 + o(x^3)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + o(x^3).$$

Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $u(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$ i.e. $u(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + o(x^3)$.

- Enfin,

$$o(u(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3 + o(x^3)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3).$$

Or $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x-x^2+x^3+o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \begin{array}{l} 1 + x - x^2 + x^3 + o(x^3) \\ + \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3) \\ + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ + o(x^3) \end{array} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Solution de l'exercice 2 On note que les fonctions $a : x \mapsto -\frac{1}{x}$ et $b : x \mapsto \frac{1}{x+3}$ sont continues sur l'intervalle $I =]-3; 0[$. Donc l'équation (E) admet des solutions.

La fonction a est continue sur I donc admet des primitives sur I dont l'une est donnée par $A : x \mapsto -\ln(|x|) = -\ln(-x)$. Donc pour tout $x \in I$, $e^{-A(x)} = e^{\ln(-x)} = -x$.

Donc l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Cx \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \right).$$

Nous avons glissé le $-$ dans la constante C .

Procédons désormais à la méthode de variation de la constante. Posons :



- $y_0 : x \mapsto x$ qui est dérivable sur I .
- y une fonction dérivable sur I .
- $\lambda = \frac{y}{y_0}$ car pour tout $x \in I$, $y_0(x) \neq 0$. Autrement dit $y = \lambda y_0$. La fonction λ est dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont.

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
 y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in I, & y'(x) - \frac{1}{x}y(x) &= \frac{1}{x+3} \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, & \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) - \frac{1}{x}\lambda(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathcal{S}_0} &= \frac{1}{x+3} \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, & \lambda'(x)x &= \frac{1}{x+3} \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, & \lambda'(x) &= \frac{1}{x(x+3)} \quad \text{car } x \neq 0.
 \end{aligned}$$

Or par le théorème de décomposition en éléments simples,

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+3}.$$

On a

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)x = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow -3} g(x)(x+3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$,

$$g(x) = \frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)}.$$

On vérifie de tête que cela fonctionne par une mise au même dénominateur. Par suite,

$$\begin{aligned}
 y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in I, & \lambda'(x) &= \frac{1}{x(x+3)} \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, & \lambda'(x) &= \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)} \\
 &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, & \lambda(x) &= \frac{1}{3} \ln(|x|) - \frac{1}{3} \ln(|x+3|) + C = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{-x}{3+x}\right) + C \\
 &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, & y(x) &= \lambda(x)y_0(x) = \left(\frac{1}{3} \ln\left(\frac{-x}{3+x}\right) + C\right)x.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\frac{1}{3} \ln\left(\frac{-x}{3+x}\right) + C\right)x \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pas d'espace vectoriel ici naturellement.