Correction Noël 04
Matrices

Solution de l'exercice 1 La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est $\mathscr{C}^4$ sur $]-1;+\infty[$ et ch sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathscr{C}^4$ sur $]-1;+\infty[$ (voisinage de 0). Donc par le théorème de Taylor-Young, f admet un développement à l'ordre 4 en 0.
On a

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right).$$

Donc

$$\frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right).$$

Posons $u(x) = x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Dès lors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll} x^2 & -x^3 & +o\left(x^3\right) \\ & -x^3 & +o\left(x^3\right) \\ & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - 2x^3 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

- *Méthode 1.* Poursuivons,

$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - 2x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(x - x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right).$$

  Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ i.e. $u(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Or $\mathrm{ch}(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + o\left(u^3\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{ch}\left(u(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - x^3 + o\left(x^3\right).}$$

Solution de l'exercice 2

1. On applique le pivot de Gauss. On a les opérations élémentaires sur les lignes suivantes :

$$
\begin{array}{lcl}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

Avez-vous bien vérifié votre résultat ? On a

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = I_3 \ \textit{OK!}$$

2. On a les égalités entre matrices suivantes :

$$
\begin{aligned}
D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Conclusion,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.}$$

3. Par récurrence, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (formule fausse en $n = 0$!)

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Or $A = PDP^{-1}$ puis par récurrence également,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 \times 4^n & 4^n & -2 \times 4^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \times 4^n & 4^n & 1 - 2 \times 4^n \\ -2 \times 4^n & -4^n & 2 \times 4^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 4^n & 4^n & 1 - 2 \times 4^n \\ -2 \times 4^n & -4^n & 2 \times 4^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^0 = I_3.}$$

On vérifie son résultat pour $n = 1$.

4. D est une matrice diagonale (important !) ayant un 0 sur sa diagonale. Conclusion,

$$\boxed{D \text{ n'est pas inversible.}}$$

On sait que $D = P^{-1}AP$. Supposons A inversible. Alors comme P et P^{-1} sont inversibles, par produit de trois matrices inversibles, D serait inversible (le produit de matrices inversibles est inversible et de plus $(AB)^{-1} = ...$). Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$$