Correction Noël 05
Equations différentielles d'ordre 2

Solution de l'exercice 1 *La fonction n'est pas définie en* 0 *a priori donc rien ne nous garantit en amont l'existence d'un développement limité.*
On a d'une part,

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Et d'autre part,

$$x^2 - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Donc,

$$f(x) = \frac{x^2 - \sin(x)}{\operatorname{sh}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)}{x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-1 + x + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)}{1 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)}$$

Posons $u(x) = \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par suite,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)$.
- Puis,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$
- Nécessairement, $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Notez qu'il est nécessaire d'aller à l'ordre 2 en $u(x)$ car si l'on s'était arrêté à l'ordre $u(x)$: $o(u(x)) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$ et non $o\left(x^3\right)$ comme souhaité.
Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right)$. Ainsi

$$\frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{-1+x+\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)}{1+u(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(-1 + x + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lllll} -1 & & +\frac{x^2}{6} & & +o\left(x^3\right) \\ & +x & & -\frac{x^3}{6} & +o\left(x^3\right) \\ & & +\frac{x^2}{6} & & +o\left(x^3\right) \\ & & & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} -1 + x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Posons (E_0) l'équation homogène associée à (E) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + y'(x) + y(x) = 0 \tag{E_0}$$

et (E_c) l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + r + 1 = 0. \tag{E_c}$$

Les racines de (E_c) sont les racines troisièmes de l'unité i.e. $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par conséquent l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de (E_0) est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Cherchons une solution de (E). On note que 3 n'étant pas une solution de (E_c), nous cherchons une solution du type $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x}$. Posons donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y_p : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x}$. La fonction y_p est deux fois dérivable et

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & y_p'(x) = 3\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & y_p''(x) = 9\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x}. \end{array}$$

Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} y_p \text{ solution de } (E) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad 9\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x} + 3\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x} + \lambda\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad 13\,\lambda\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} \\ & \Leftrightarrow & 13\,\lambda = 1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{3x} \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = \dfrac{1}{13}. \end{array}$$

On obtient alors que $y_p : x \mapsto \frac{1}{13}\,\mathrm{e}^{3x}$ est UNE solution de (E).
Conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \dfrac{1}{13}\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Un très très chaleureux réveillon à tous.tes !!!