Correction Noël 06
Calcul d'intégrales

Solution de l'exercice 1 On sait que

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2+\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}u^3+o\left(u^3\right) \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+o\left(u^3\right).$$

Posons $u(x)=x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}+o\left(x^6\right).$$

Par suite,

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{16}+o\left(x^5\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{16}+o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{0}$. Donc

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{16}+o\left(x^5\right)$.
- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^3}{8}+\tfrac{x^5}{16}+o\left(x^5\right)\right)\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^3}{8}+\tfrac{x^5}{16}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^2}{4} \quad -\tfrac{x^4}{16} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^4}{16} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^2}{4}-\tfrac{x^4}{8}+o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x^2}{4}-\tfrac{x^4}{8}+o\left(x^5\right)\right)\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^3}{8}+\tfrac{x^5}{16}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^3}{8} \quad -\tfrac{x^5}{32} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^5}{16} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^3}{8}-\tfrac{3x^5}{32}+o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

- *Méthode 1.* Mais aussi,

$$\begin{aligned} u(x)^5=u(x)^3u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x^3}{8}-\tfrac{3x^5}{32}+o\left(x^5\right)\right)\left(\tfrac{x^2}{4}-\tfrac{x^4}{8}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^5}{32}+o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

  Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, on en déduit que $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{32}$ i.e. $u(x)^5 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{32}+o\left(x^5\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^5}{32}+o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right).$$

Notez au passage que le calcul de u^4 n'a pas été nécessaire mais celui de u^2 si pour obtenir u^3 notamment. Or $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o\left(u^5\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \arctan\left(u(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} \quad -\frac{x^3}{8} \quad +\frac{x^5}{16} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\frac{x^3}{24} \quad +\frac{x^5}{32} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +\frac{x^5}{160} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} + o\left(x^5\right).}$$

Solution de l'exercice 2 On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left[0; \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\right] = [0; \mathrm{sh}(1)]$. Donc $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ existe}}$. On pose $x = \mathrm{sh}(t)$. La fonction sh est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$ et on a $\mathrm{d}x = \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$. Donc par le théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)+1}}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \text{CAR } \mathrm{ch}(t) \geqslant 0 \\ &= \int_0^1 \mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On linéarise $\mathrm{sh}^2(t)$ ou bien par une formule directe (de la formule $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, on en déduit que $(i\,\mathrm{sh}(t))^2 = \frac{1-\mathrm{ch}(2t)}{2}$ i.e. $\mathrm{sh}^2(t) = \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2}$) ou bien on redémontre la formule en développant. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{sh}^2(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} - 2}{4} = \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2}.$$

Par conséquent,

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{sh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\mathrm{sh}(2)}{4} - \frac{1}{2} - 0.$$

Conclusion

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{sh}(2)-2}{4}.}$$