Correction Noël 07
Systèmes linéaires

Solution de l'exercice 1 On sait que

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

D'autre part,

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}x^3 + o\left(x^3\right) - 1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\arctan(x)}{\sqrt{1+x}-1} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)}{\frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} + o\left(x^2\right)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(2 - \frac{2x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right) \frac{1}{1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)}. \end{aligned}$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)$.
- *Méthode 1.* Puis,

$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right)\left(-\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{16} + o\left(x^2\right).$$

  Méthode 2. Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{4}$ alors $u(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{16}$ i.e. $u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{16} + o\left(x^2\right)$.
- Enfin,

$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^2}{16} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right).$$

Comme $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+u(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad + \frac{x^2}{16} + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(2 - \frac{2x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right)\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o\left(x^2\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad - \frac{2x^2}{3} + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{x}{2} - \frac{(3+16)x^2}{24} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{x}{2} - \frac{19x^2}{24} + o\left(x^2\right).}$$

On peut vérifier le premier terme en voyant que

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

et

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

Donc par quotient,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{x}{2}} = 2.$$

Solution de l'exercice 2 En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, on a les opérations élémentaires suivantes :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{S}_m) \quad : \quad & \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + my + z = m \\ mx + y + z = 1 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + my + z = m \\ (1-m^2)\, y + (1-m)\, z = 1 - m^2 \\ (1-m)\, y + (m-1)\, z = m^2 - m \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}
\end{aligned}
$$

Premier cas, $m \neq 1$. Alors,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{S}_m) \quad \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + my + z = m \\ (1+m)\, y + z = 1 + m \\ y - z = -m \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{1-m} L_3 \end{array} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + my + z = m \\ y - z = -m \\ (1+m)\, y + z = 1 + m \end{cases} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + my + z = m \\ y - z = -m \\ (1+1+m)\, z = 1 + m + m(1+m) = (1+m)(1+m) \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 - (1+m)\, L_2 \ .
\end{aligned}
$$

Supposons également que $m \neq -2$. Alors,

$$
(\mathcal{S}_m) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = m - my - z = \frac{m^2+2m-m-m^2-2m-1}{m+2} = -\frac{m+1}{m+2} \\ y = -m + z = \frac{-m^2-2m+m^2+2m+1}{m+2} = \frac{1}{m+2} \\ z = \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{cases}
$$

Dans ce cas, on récupère un unique triplet solution

$$\mathscr{S}_m = \left\{ \left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2} \right) \right\}.$$

On vérifie son résultat, pour $m=-1$ par exemple, le triplet solution est $(0,1,0)$ et on a

$$(\mathcal{S}_1)\ :\ \begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x+y-z=1 \end{cases}.$$

On réinjecte :

$$\begin{cases} 1=1 \\ -1=-1 \\ 1=1 \end{cases} \quad \textit{OK.}$$

Le cas $m=-1$ apportant trop de simplifications ne permet pas bien de vérifier. Pour $m=0$, le triplet solution est $(-1/2,1/2,1/2)$ et on a

$$(\mathcal{S}_0)\ :\ \begin{cases} y+z=1 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}.$$

On réinjecte :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0 \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{2}=0 \end{cases} \quad \textit{OK !}$$

Si $m=1$, on a

$$(\mathcal{S}_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=1-y-z.$$

Dans ce cas l'ensemble solution est

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_1 &= \left\{ (1-y-z,y,z) \;\middle|\; (y,z)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ (1,0,0)+y\,(-1,1,0)+z\,(-1,0,1) \;\middle|\; (y,z)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\ &= (1,0,0)+\mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right). \end{aligned}$$

On récupère un plan.

Enfin, si $m=-2$, on a

$$(\mathcal{S}_{-2}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+z=-2 \\ y-z=2 \\ 0=(1-2)\,(1-2) \ \text{ impossible.} \end{cases}$$

Donc $\mathscr{S}_2=\emptyset$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_m = \begin{cases} \left\{ \left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2} \right) \right\} & \text{si } m\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\} \\ (1,0,0)+\mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right) & \text{si } m=1 \\ \emptyset & \text{si } m=-2. \end{cases}}$$