Correction Noël 08
Equations différentielles d'ordre 1

Solution de l'exercice 1 Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x^2}{x}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$. Donc en posant $u = \frac{1}{x^2} \to 0$, respectivement $u = \frac{1}{x} \to 0$, on obtient au voisinage de $+\infty$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ln(x) + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \ln(x) - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ln(x) - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$

NB : tous les termes sont bien rangés par ordre de prépondérance, le logarithme n'est pas simplifiable (et constitue une vitesse de référence). Puisque les termes ne sont pas polynomiaux on ne parle pas de développement limité mais de développement asymptotique.

Solution de l'exercice 2 Soit Δ le discriminant de X^2+2X+3. On a $\Delta = 4-12 = -8 < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+3 \neq 0$. Ainsi, on note que les fonctions $a : x \mapsto -\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ et $b : x \mapsto 3x+2$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc (E) admet des solutions. L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_0) \ : \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) - \frac{2x+1}{x^2+2x+3}y(x) = 0.$$

Puisque $a : x \mapsto -\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ elle admet des primitives sur cet intervalle dont

$$A : x \mapsto -\ln\left(\left|x^2+2x+3\right|\right) = -\ln\left(x^2+2x+3\right).$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{\ln\left(x^2+2x+3\right)} = x^2+2x+3.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\left(x^2+2x+3\right) \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x+3 \end{array} \right).$$

Procédons maintenant à la méthode de variation de la constante. Posons

- $y_0 : x \mapsto x^2+2x+3$,
- y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$,
- $\lambda = \frac{y}{y_0}$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) \neq 0$, on en déduit que λ est bien définie. De plus, y_0 est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et y aussi par hypothèse donc par quotient, λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $y = \lambda\, y_0$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - \frac{2x+1}{x^2+2x+3} y(x) = 3x+2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \underbrace{\lambda(x) y_0'(x) - \frac{2x+1}{x^2+2x+3}\lambda(x) y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = 3x+2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) y_0(x) = 3x+2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = \frac{3x+2}{y_0(x)} = \frac{3x+2}{x^2+2x+3} \qquad \text{car } y_0(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 2x + 3$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x + 2$. Dès lors, on observe

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{3x+2}{x^2+2x+3} = \frac{3}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{3}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{(x+1)^2+2}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+2x+3}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par

$$F : x \mapsto \frac{3}{2}\ln\left(\left|x^2+2x+3\right|\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \left(\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C\right)\left(x^2+2x+3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C\right)\left(x^2+2x+3\right) \end{array} \middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$