Correction Noël 09
Matrices

Solution de l'exercice 1

1. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \frac{\pi}{3} + h$ i.e. $h = x - \frac{\pi}{3} \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow} 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(h) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(h)\right) = \cos(h) - \sqrt{3}\sin(h).$$

Or

$$\cos(h) \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + o\left(h^4\right)$$
$$\sin(h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^3}{6} + o\left(h^4\right)$$

Par conséquent,

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + o\left(h^4\right) - \sqrt{3}h + \sqrt{3}\frac{h^3}{6} + o\left(h^4\right) \underset{h\to 0}{=} 1 - \sqrt{3}h - \frac{h^2}{2} + \frac{\sqrt{3}h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o\left(h^4\right).$$

Conclusion, en revenant à $x = \frac{\pi}{3} + h \to \frac{\pi}{3}$, on a

$$\boxed{2\cos(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} 1 - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + \frac{\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{6} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4}{24} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right).}$$

2. On a vu dans la question précédente que

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \underset{h\to 0}{=} 1 - \sqrt{3}h - \frac{h^2}{2} + \frac{\sqrt{3}h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o\left(h^4\right).$$

En particulier,

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \underset{h\to 0}{=} 1 - \sqrt{3}h - \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)$$

i.e.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - 1 + \sqrt{3}h \underset{h\to 0}{=} -\frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - 1 + \sqrt{3}h}{h^2} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - 1 + \sqrt{3}h}{h^2} = -\frac{1}{2}.}$$

Solution de l'exercice 2

1. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P(A) = A^2 - 5A + 4I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P(A) = O_2.}$$

2. Par la question précédente que $A^2-5A+4I_2=O_2$ et donc $A(A-5I_2)=-4I_2$ ou encore
$$A\left(\frac{5}{4}I_2-\frac{1}{4}A\right)=I_2.$$
Par conséquent, A est inversible et $A^{-1}=\frac{5}{4}I_2-\frac{1}{4}A$ i.e.
$$A^{-1}=\frac{5}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}.$$
Conclusion, $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et
$$\boxed{A^{-1}=\frac{5}{4}I_2-\frac{1}{4}A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}.}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par le théorème de la division euclidienne, il existe Q_n et R_n deux polynômes tels que
$$X^n=Q_nP+R_n \qquad \text{avec} \qquad \deg(R_n)<\deg(P)=2.$$
Donc $\deg(R_n)\leqslant 1$ i.e. il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$ tel que $R_n=a_nX+b_n$. On a donc
$$X^n=Q_n\left(X^2-5X+4\right)+a_nX+b_n.$$
Or le discriminant de P est $\Delta=25-16=9$. Donc les racines de P sont $\frac{5+3}{2}=4$ et $\frac{5-3}{2}=1$ (évident : la somme faisant 5 et le produit 4). En évaluant en ces racines on obtient alors le système suivant :
$$\begin{cases}1^n=a_n+b_n\\4^n=4a_n+b_n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1^n=a_n+b_n\\4^n-1=3a_n\end{cases} \quad L_2\leftarrow L_2-L_1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}b_n=1-a_n=\frac{3-4^n+1}{3}=\frac{4-4^n}{3}\\a_n=\frac{4^n-1}{3}\end{cases}$$
Conclusion, le reste de la division euclidienne de X^n par P est
$$\boxed{R_n=\frac{4^n-1}{3}X+\frac{4-4^n}{3}.}$$

4. En évaluant $X^n=Q_nP+R_n$ en A, on a
$$\begin{aligned}A^n=Q_n(A)P(A)+R_n(A)&=0_2+aA+bI_2 \qquad \text{d'après la question 1}\\&=\frac{4^n-1}{3}A+\frac{4-4^n}{3}I_2\\&=\frac{4^n-1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix}+\frac{4-4^n}{3}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2&1-4^n\\2-2\times4^n&2\times4^n+1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad A^n=\frac{4^n-1}{3}A+\frac{4-4^n}{3}I_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2&1-4^n\\2-2\times4^n&2\times4^n+1\end{pmatrix}.}$$
On vérifie son résultat. Si $n=0$,
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2&1-4^n\\2-2\times4^n&2\times4^n+1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=I_2 \text{ } \textit{OK.}$$
Si $n=1$,
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2&1-4^n\\2-2\times4^n&2\times4^n+1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&-3\\-6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix} \quad \textit{OK!}$$

5. Bon anniversaire Ruben !!