Correction Noël 10
Equations différentielles d'ordre 2

Solution de l'exercice 1 On sait que $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + o\left(u^8\right)$. Donc, en posant $u = t^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\arctan\left(t^2\right) \underset{t\to 0}{=} t^2 - \frac{t^6}{3} + \frac{t^{10}}{5} - \frac{t^{14}}{7} + o\left(t^{16}\right).$$

Or la fonction $t \mapsto \arctan\left(t^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est UNE primitive de $t \mapsto \arctan\left(t^2\right)$ sur $\mathbb{R}$ (voisinage de 0). Donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{21} + \frac{x^{11}}{55} - \frac{x^{15}}{105} + o\left(x^{17}\right).$$

Or $F(0) = \int_0^0 \arctan\left(t^2\right) \mathrm{d}t = 0$. Conclusion,

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{21} + \frac{x^{11}}{55} - \frac{x^{15}}{105} + o\left(x^{17}\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Les coefficients $a = 3$, $b = 4$ et $c = \frac{1}{3}$ étant constant et le second membre $d : x \mapsto x$ continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que (E) admet des solutions. L'équation homogène associée est

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad 3y''(x) + 4y'(x) + \frac{1}{3}y(x) = 0$$

et l'équation caractéristique

$$(E_c) \qquad 3r^2 + 4r + \frac{1}{3} = 0.$$

Le discriminant associé vaut $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$. Donc (E_c) possède deux racines :

$$r_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{6} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{3} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3} - 2}{3}.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto A\,\mathrm{e}^{-\frac{2+\sqrt{3}}{3}x} + B\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}-2}{3}x} \end{array} \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ou encore

$$\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{2+\sqrt{3}}{3}x} \end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}-2}{3}x} \end{array} \right).$$

Puisque le second membre est polynomiale de degré 1, cherchons une solution polynomiale de degré 1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $y_p : x \mapsto ax + b$. La fonction y_p est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_p'(x) = a \qquad \text{ET} \qquad y_p''(x) = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3y''(x) + 4y'(x) + \frac{1}{3}y(x) = x \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 4a + \frac{ax + b}{3} = x. \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} \frac{a}{3} = 1 \\ 4a + \frac{b}{3} = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = -12a = -36 \end{cases}$$

Donc $y_p : x \mapsto 3x - 36$ est une solution de (E). Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto A\,\mathrm{e}^{-\frac{2+\sqrt{3}}{3}x} + B\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}-2}{3}x} + 3x - 36 \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Je vous souhaite un très joyeux nouvel an, fêtez ça bien et on se retrouve en pleine forme l'année prochaine !!!