Correction Printemps 01
Trigo - Représentation matricielle

Solution de l'exercice 1

1. On sait que pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(p) + \sin(q) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. D'où, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\sin(5x) + \sin(x) = 2\sin\left(\frac{5x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right) = 2\sin(3x)\cos(2x)\,.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{llll}
(E) & & \sin(5x) + \sin(x) + 2\sin^2(x) = 1 & \\
 & \Leftrightarrow & 2\sin(3x)\cos(2x) + 2\sin^2(x) - 1 = 0 & \text{par la question précédente} \\
 & \Leftrightarrow & 2\sin(3x)\cos(2x) - \cos(2x) = 0 & \\
 & \Leftrightarrow & \cos(2x)\left(2\sin(3x) - 1\right) = 0 & \\
 & \Leftrightarrow & \cos(2x) = 0 \text{ OU } 2\sin(3x) - 1 = 0 & \\
 & \Leftrightarrow & 2x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ OU } \sin(3x) = \frac{1}{2} & \\
 & \Leftrightarrow & x \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ OU } 3x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ OU } 3x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] & \\
 & \Leftrightarrow & x \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ OU } x \equiv \frac{\pi}{18}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ OU } x \equiv \frac{5\pi}{18}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]. &
\end{array}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

Solution de l'exercice 2

1. Par définition de g,

$$g((1,1,1)) = A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \textit{encore une matrice Wagnerienne !}$$

Conclusion,

$$\boxed{g((1,1,1)) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}.}$$

2. Par la question précédente, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant 1$. Par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(A)) \leqslant 3 - 1 = 2.$$

Or on observe que les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) \geqslant \mathrm{rg}(C_1, C_2) = 2$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$$

3. Par la question précédente, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$. Or $C_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $C_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(A)$. Ainsi, (C_1, C_2) forme une base de $\mathrm{Im}(A)$:

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) && C_2 \leftarrow -C_2 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

D'autre part, puisque $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}_3}$. Alors $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A)$. Or par le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 2 = 1.$$

Donc $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$:

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$