Correction Printemps 02
Complexes - Intégration

Solution de l'exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et $(E) : (z+i)^n - (z-i)^n = 0$. On a :

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad (z+i)^n = (z-i)^n.$$

Premier cas. Supposons $z = i$. Alors,

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad (2i)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2i = 0 \qquad \textit{Absurde.}$$

Par conséquent, i n'est pas une solution de (E).
Second cas. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors,

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(z+i)^n}{(z-i)^n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Posons $\omega = \frac{z+i}{z-i}$. Alors,

$$\begin{aligned}
(E) \quad & \Leftrightarrow \quad \omega \in \mathbb{U}_n \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \omega = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \frac{z+i}{z-i} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z+i = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-i) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = i\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right).
\end{aligned}$$

Notons que pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a

$$1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2k\pi}{n} \equiv 0 \ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad k = 0,$$

car $\frac{2k\pi}{n} \in [0; 2\pi[$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$. De plus, si $k = 0$,

$$z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = i\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad z \times 0 = i(1+1) \quad \Leftrightarrow \quad 2i = 0 \qquad \textit{impossible.}$$

Par conséquent, $k \neq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(E) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1; n-1]\!], \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = i\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1; n-1]\!], \quad z = i\frac{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}.
\end{aligned}$$

Par factorisation par l'angle moitié, on a pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on a

$$i\frac{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}} = i\frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)} = i\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Attention à ne pas diviser par le cosinus pour faire apparaitre de la tangente car rien n'interdit que le cosinus s'annule (ce qui est le cas pour $k = \frac{n}{2}$ dès que n est pair).
Conclusion l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \;\middle|\; k \in [\![1; n-1]\!] \right\}.}$$

Notez qu'ici $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u = f$ et $v : t \mapsto \frac{-\cos(nt)}{n}$.Par hypothèse u est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ et v étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est notamment $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. De plus pour tout $t \in [a;b]$,

$$u'(t) = f'(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \sin(nt).$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f'(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)}{n} + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Majorons maintenant la valeur absolue de cette expression par une suite convergeant vers 0 pour montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Par l'inégalité triangulaire, puisque $a < b$,

$$\begin{aligned} |I_n| &\leqslant \left|\frac{f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)}{n}\right| + \left|\int_a^b f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{|f(a)|\,|\cos(na)| + |f(b)|\,|\cos(nb)|}{n} + \int_a^b |f'(t)|\,\frac{|\cos(nt)|}{n}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or $|\cos(na)| \leqslant 1$, $|\cos(nb)| \leqslant 1$, et pour tout $t \in [a;b]$, $|\cos(nt)| \leqslant 1$. Donc

$$|I_n| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t}{n}.$$

Posons $M = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ et observons (c'est important) que M ne dépend pas de n. Par conséquent,

$$0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Donc par le théorème d'encadrement $|I_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

NB : on pouvait continuer à majorer M. Puisque f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, f' est continue sur $[a;b]$ et est donc bornée (et atteint ses bornes) sur $[a;b]$. Posons $N = \sup_{s\in[a;b]} |f'(s)|$. On a alors par croissance de l'intégrale

$$M\,|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b N\,\mathrm{d}t = |f(a)| + |f(b)| + (b-a)N.$$