Correction Printemps 03
Calcul algébrique - Probabilités

Solution de l'exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la somme est triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} 2^i \binom{n+1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^{k} 2^i \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{2^{k+1}-1}{2-1} && \text{car on reconnait une somme géométrique de raison } 2 \neq 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^k - 2^{n+2} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} + 1 \\
&= 2\,(2+1)^{n+1} - 2^{n+2} - 2^{n+1} + 1 && \text{car on reconnait deux binômes de Newton} \\
&= 2 \times 3^{n+1} - 3 \times 2^{n+1} + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = 2 \times 3^{n+1} - 3 \times 2^{n+1} + 1.}$$

Solution de l'exercice 2 Soit M l'évènement « être malade » et P l'évènement « être positif ». On sait que $\mathbb{P}(M) = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, que $\mathbb{P}(P \mid M) = 0,99$ et enfin que $\mathbb{P}\left(P \,\middle|\, \overline{M}\right) = 0,002 = 2.10^{-3}$. On cherche $\mathbb{P}(M \mid P)$. Puisque $\mathbb{P}(P) \neq 0$ et $\mathbb{P}(M) \neq 0$, par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(M \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)}.$$

De plus, $\left(M, \overline{M}\right)$ forme un système complet d'évènements (incompatibles et) non négligeables. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M \mid P) &= \frac{\mathbb{P}(P \mid M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P \mid M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(P \,\middle|\, \overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(P \mid M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P \mid M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(P \,\middle|\, \overline{M}\right)(1 - \mathbb{P}(M))} \\
&= \frac{0,99 \times 10^{-3}}{0,99 \times 10^{-3} + 2.10^{-3} \times 0,999} \\
&= \frac{110}{110 + 2 \times 111} \\
&= \frac{110}{332} \\
&= \frac{55}{166}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(M \mid P) = \frac{55}{166}.}$$

On a pratiquement une chance sur trois d'être en bonne santé. C'est étonnant ? Pas tant que cela. Certes, lorsque l'on est malade le test est bien bien plus souvent positif que lorsque l'on est sain. Cependant, nous avons aussi une très grande chance d'être plutôt sain que malade donc au total, il n'est pas si improbable d'être sain malgré un test positif.