



## Exercice Printemps 04

### Fonctions usuelles - Applications linéaires

**Exercice 1** Soit  $f : x \mapsto \arccos(2x^2 - 1)$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Déterminer le domaine de dérivation de  $f$ .
3. Préciser la parité de  $f$ .
4. Simplifier  $f$  sur  $[0; 1]$ .
5. A l'aide de la formule  $\forall u \in [-1; 1], \frac{\arccos(-u) + \arccos(u)}{2} = \dots$  en déduire une expression simplifiée de  $f$  sur  $[-1; 0]$ .

**Exercice 2** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ . On suppose que  $f$  et  $g$  commutent :  $f \circ g = g \circ f$ . On suppose également que

$$E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g).$$

1. Montrer que  $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
2. En déduire que  $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$ .
3. On suppose de plus  $E$  de dimension finie et  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Ker}(g)$  en somme directe. Montrer alors que  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ .