Exercice Printemps 04
Fonctions usuelles - Applications linéaires

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad -1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D} = [-1;1].}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } x \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < 2x^2 - 1 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < 2x^2 < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 < x < 0 \ \text{ OU } \ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Conclusion, le domaine de dérivabilité de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}' =]-1;0[\cup]0;1[.}$$

3. On commence par observer que $\mathscr{D}$ est centré en 0 : $\forall x \in \mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$. De plus,

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(-x) = \arccos\left(2(-x)^2 - 1\right) = \arccos\left(2x^2 - 1\right) = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

4. Soit $x \in]0;1[$. La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^2-1\right)' \times \frac{-1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} \\ &= 4x \times \frac{-1}{\sqrt{1-(4x^4-4x^2+1)}} \\ &= -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4+4x^2-1}} \\ &= -\frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} \\ &= -\frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{CAR } x > 0 \\ &= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

On observe alors

$$\forall x \in]0;1[, \qquad f'(x) = 2\arccos'(x).$$

Dès lors,
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0;1[\,, \qquad f(x) = 2\arccos(x) + C$$
En évaluant en $\sqrt{2}/2$, on a
$$\arccos\left(2\times\frac{1}{2}-1\right) = 2\frac{\pi}{4} + C \ \Leftrightarrow\ \arccos(0) = \frac{\pi}{2} + C \ \Leftrightarrow\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + C \ \Leftrightarrow\ C = 0.$$
Ainsi,
$$\forall x \in]0;1[\,, \qquad f(x) = 2\arccos(x).$$
On pouvait aussi utiliser la continuité en 0 ou en 1 ou l'évaluation en $x = 1/2$ ou $x = \sqrt{3}/2$. Cela permet notamment de vérifier son résultat en testant une autre valeur.
De plus, en 0, on a
$$f(0) = \arccos(-1) = \pi \text{ et } 2\arccos(0) = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi.$$
De même en 1,
$$f(1) = \arccos(2-1) = \arccos(1) = 0 \text{ et } 2\arccos(1) = 0.$$
Donc la formule reste vraie en 0 et en 1 :
$$\boxed{\forall x \in [0;1]\,, \qquad f(x) = 2\arccos(x).}$$

5. Par parité, pour tout $x \in [-1;0]$, en posant $y = -x \in [0;1]$,
$$f(x) = f(-y) = f(y) = 2\arccos(y) = 2\arccos(-x)\,.$$
La fonction arccos admet le point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pour centre de symétrie :
$$\forall u \in [-1;1]\,, \qquad \frac{\arccos(-u) + \arccos(u)}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \arccos(-u) = \pi - \arccos(u).$$
Ainsi,
$$\forall x \in [-1;0]\,, \qquad f(x) = 2\pi - 2\arccos(x).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in [-1;0]\,, \qquad f(x) = 2\pi - 2\arccos(x).}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $x \in E$. Alors par hypothèse, il existe $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Ker}(g)$ tel que
$$x = x_1 + x_2.$$
Alors en composant par $g \circ f$, on a par linéarité de $g \circ f$,
$$g \circ f(x) = g \circ f(x_1) + g \circ f(x_2)\,.$$
Or $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$. Donc $f(x_1) = 0_E$. Puis comme g est linéaire,
$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(0_E) = 0_E.$$
Ainsi,
$$g \circ f(x) = g \circ f(x_2)\,.$$
Or par hypothèse, $g \circ f = f \circ g$ et on a $x_2 \in \mathrm{Ker}(g)$. Donc
$$g \circ f(x) = f \circ g(x_2) = f(g(x_2)) = f(0_E) = 0_E.$$
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que
$$\boxed{g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

2. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(f)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f\,(y)$. Donc par ce qui précède,

$$g\,(x) = g\,(f\,(y)) = g \circ f(y) = 0_{\mathscr{L}(E)}\,(y) = 0_E.$$

Ainsi $x \in \mathrm{Ker}\,(g)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)\,.}$$

3. On suppose de plus E de dimension finie et $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(g)$ en somme directe. Puisque l'on avait également $E = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$, on en déduit que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(g)$ sont supplémentaires :

$$E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(g)\,.$$

Donc, comme E est de dimension finie, on a en particulier

$$\dim\,(E) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g))\,.$$

Puis par le théorème du rang (ici l'espace de **départ** est aussi E) : on en déduit que

$$\dim\,(E) = \dim\,(E) - \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g))\,.$$

Et puisque par la question précédente, on a $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)$, on en conclut que

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)\,.}$$