Correction Printemps 05
Equations différentielles - Intégration

Solution de l'exercice 1

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad xy'(x) - \left(2x^2-1\right) y(x) = x. \tag{E}$$

Commençons par écrire l'équation « résolue » en y'. Sur $]0;+\infty$, on a

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in]0;+\infty[, \quad y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y(x) = 1 \qquad \text{car } x \neq 0.$$

Considérons (E_0) l'équation homogène associée :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y(x) = 0. \tag{E_0}$$

La fonction $x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (intervalle de $\mathbb{R}$) et admet donc DES primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus la fonction $x \mapsto x^2 - \ln(x)$ est UNE primitive de $x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de (E_0) est donné par

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_0 &= \left\{ y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{x^2 - \ln(x)} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant la méthode de variation de la constante. Soit $z \in \mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ et posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_0(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$ et $y(x) = z(x)y_0(x)$. Puisque la fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que y est dérivable si et seulement si z est dérivable et dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) = z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(E) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) z(x)y_0(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) + z(x)\underbrace{\left(y_0'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y_0(x)\right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = 1 \\
&\Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}.
\end{aligned}$$

On reconnait une fonction du type $u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u : x \mapsto -x^2$. Donc une primitive de z' sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par $x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
(E) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + C \\
&\Leftrightarrow \qquad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = z(x)y_0(x) = \left(-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + C\right)\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} = \frac{-1}{2x} + C\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion, en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E), et $y_p : x \mapsto \frac{-1}{2x}$, on obtient un espace affine de dimension 1 (un espace vectoriel translaté d'une solution particulière)

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-1}{2x} + C\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\} = y_p + \mathrm{Vect}\left(y_0\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\exp^{(k)}(t) = \exp(t).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle étant donc notamment $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0;x]$ (ou $[x;0]$) par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \sup_{t \in [0;x]} \left| \exp^{(n+1)}(t) \right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^0}{k!} x^k \right| \leqslant \sup_{t \in [0;x]} \left| \mathrm{e}^t \right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Posons $M_x = \sup_{t \in [0;x]} \left| \mathrm{e}^t \right|$. Par croissance de la fonction exponentielle on peut noter que

$$M_x = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases} .$$

Le réel M_x dépend donc de x mais pas de n. On a alors,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant M_x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or par croissance comparée, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (y compris si $|x| > 1$). Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0.$$

Autrement dit, $\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \text{ converge}}$ et sa somme totale est donnée par

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x .}$$