Correction Printemps 06
Analyse asymptotique - Représentation matricielle

Solution de l'exercice 1

1. Pour tout $x > \frac{1}{\pi}$, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \ln(1) = 0$ et $0 < \frac{1}{x} < \pi$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Par conséquent f est bien définie sur $\left]\frac{1}{\pi}; +\infty\right[$ et

$$\forall x > \frac{1}{\pi}, \qquad f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sin^{3/2}\left(\frac{1}{x}\right)}, \qquad \text{car } \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0.$$

On a alors les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-3/2} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{-3/2} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\frac{1}{x^{-3/2}}\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-3/2} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x^{3/2}}{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Or on sait que $(1+u)^{-3/2} \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{3u}{2} + o(u)$. Donc en posant $u = -\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a bien $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $o(u) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{12x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{12x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{12x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).}$$

2. Notamment, on déduit de la question précédente que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

De plus $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Conclusion,

$\boxed{f \text{ admet une branche asymptotique en } +\infty \text{ de direction } (Ox).}$

Solution de l'exercice 2

1. La famille $\mathscr{B}_1$ est une famille de polynôme de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}_1$ est libre. Or $\mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_1\right) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$. Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$
On pouvait aussi donner sa matrice et vérifier que cette matrice était inversible.

2. *Méthode 1.* Par définition, on a
$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + (X+1) + (X+1)^2 = X^2 + 3X + 4 \\ f\left(X+1\right) &= -1 - (X+1)^2 = -X^2 - 2X - 2 \\ f\left((X+1)^2\right) &= -1 - (X+1) = -X - 2. \end{aligned}$$
Or par linéarité, $f\left(X+1\right) = f\left(X\right) + f(1)$. Donc
$$f\left(X\right) = f\left(X+1\right) - f(1) = -X^2 - 2X - 2 - X^2 - 3X - 4 = -2X^2 - 5X - 6.$$
De même, $f\left((X+1)^2\right) = f\left(X^2\right) + 2f(X) + f(1)$. Donc
$$\begin{aligned} f\left(X^2\right) &= f\left((X+1)^2\right) - 2f(X) - f(1) \\ &= -X - 2 - 2\left(-2X^2 - 5X - 6\right) - \left(X^2 + 3X + 4\right) \\ &= 3X^2 + 6X + 6. \end{aligned}$$
Finalement pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a
$$\begin{aligned} f\left(P\right) &= a\left(3X^2 + 6X + 6\right) + b\left(-2X^2 - 5X - 6\right) + c\left(X^2 + 3X + 4\right) \\ &= \left(3x - 2b + c\right)X^2 + \left(6a - 5b + 3c\right)X + 6a - 6b + 4c. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ aX^2 + bX + c & \mapsto & \left(3a - 2b + c\right)X^2 + \left(6a - 5b + 3c\right)X + 6a - 6b + 4c. \end{array}}$$
Méthode 2. Posons $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique et $\tilde{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\mathscr{B}_1\right)$. Alors,
$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Posons $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(f\right)$ et $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathscr{C}\right) = \tilde{P}^{-1}$. Alors par la formule de changement de base :
$$B = P^{-1}AP.$$
Attention ! Cette fois la formule est un peu inversée : on ne doit pas prendre $\tilde{P}$ mais bien P ! En effet « l'ancienne base » est $\mathscr{B}_1$ tandis que « la nouvelle base » est $\mathscr{C}$. C'est pourquoi la formule de changement de base est à bien comprendre avec l'interprétation ancienne $\to$ nouvelle base.
On a les opérations élémentaires suivantes :
$$\begin{array}{ccc} \tilde{P} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} & I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

On retrouve (après avoir vérifié son résultat !) que $\tilde{P}$ est inversible et $P = \tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc par la formule de changement de base

$$\begin{aligned} B &= \tilde{P} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$f(1) = X^2 + 3X + 4, \qquad f(X) = -2X^2 - 5X - 6, \qquad f\left(X^2\right) = 3X^2 + 6X + 6.$$

Finalement, comme dans la méthode 1, pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned} f(P) &= a\left(3X^2 + 6X + 6\right) + b\left(-2X^2 - 5X - 6\right) + c\left(X^2 + 3X + 4\right) \\ &= (3x - 2b + c)\, X^2 + (6a - 5b + 3c)\, X + 6a - 6b + 4c. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ aX^2 + bX + c & \mapsto & (3a - 2b + c)\, X^2 + (6a - 5b + 3c)\, X + 6a - 6b + 4c. \end{array}}$$

3. Puisque $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ forme une base de $\mathrm{Im}\,(A)$, en posant P_1 et P_2 tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(P_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(P_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, alors (P_1, P_2) est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. On a

$$P_1 = 1 + (X+1) = X + 2 \qquad \text{et} \qquad P_2 = 1 + (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1.$$

De même $P_3 = 1 + (X+1) + (X+1)^2 = X^2 + 3X + 3$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ (logique par la question 1 de l'exercice de révision 01). Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(X + 2, X^2 + 2X + 1\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(X^2 + 3X + 3\right).}$$