Correction Printemps 07
Intégration - Probabilités

Solution de l'exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'inégalité triangulaire, car $\pi > 0$, on a

$$|J_n| \leqslant \int_0^\pi \left|\sin(x)\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}} - 1\right)\right| \mathrm{d}x.$$

Or pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$\left|\sin(x)\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}} - 1\right)\right| \leqslant \left|\frac{1}{1+\frac{x}{n}} - 1\right| = \left|\frac{1-1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right| = \frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}.$$

De plus pour tout $x \in [0;\pi]$, $1+\frac{x}{n} \geqslant 1$ et donc $\frac{1}{1+\frac{x}{n}} \leqslant 1$. Ainsi,

$$\left|\sin(x)\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}} - 1\right)\right| \leqslant \frac{x}{n}.$$

Donc par croissance de l'intégrale et le fait que $0 \leqslant \pi$, on a

$$|J_n| \leqslant \int_0^\pi \frac{x}{n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2n}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi^2}{2n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{2n} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, $(|J_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et même

$$\lim_{n\to+\infty} |J_n| = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le changement de variable $x = nu$, on a $u = \frac{x}{n}$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\mathrm{d}x$ et donc

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} n\frac{\sin(nu)}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi n\frac{\sin(x)}{1+\frac{x}{n}}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x.$$

Par suite,

$$I_n = \int_0^\pi \sin(x)\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}} - 1\right) + \sin(x)\,\mathrm{d}x = J_n + \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n + \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} = 1+1 = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 2.}$$

Solution de l'exercice 2

1. Notons A_k l'évènement « obtenir un 5 ou un 6 à l'étape k ». On observe que pour n'obtenir que n points en n lancers, il faut n'avoir eu que des résultats entre 1 et 4 :
$$(G_n = n) = \bigcap_{k=0}^{k=n} \overline{A_k}.$$
Donc, par **indépendance** des évènements A_k,
$$\mathbb{P}\left(G_n = n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{k=n} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right).$$
Le dé étant équilibré, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Dès lors,
$$\mathbb{P}\left(G_n = n\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
De même,
$$\mathbb{P}\left(G_n = 2n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{k=n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k\right) = \frac{1}{3^n}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(G_n = n\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \mathbb{P}\left(G_n = 2n\right) = \frac{1}{3^n}.}$$
2. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire retournant 1 si A_k est réalisé et 0 sinon. Alors $\mathbb{P}\left(Y_k = 1\right) = \mathbb{P}\left(A_k\right) = \frac{1}{3}$ (car le dé est équilibré). Donc $Y_k \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$. De plus, on observe que
$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$
Puisque les Y_k sont
   - indépendants,
   - de même loi,
   - de loi de Bernoulli,

   on en déduit directement que
$$\boxed{X_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right).}$$
3. Puisque X_n est le nombre de fois où l'on a gagné 2 points, pendant également $n - X_n$ étapes, on a gagné 1 points. Donc au total le gain est de :
$$G_n = 2X_n + 1 \times (n - X_n) = X_n + n.$$
Conclusion,
$$\boxed{G_n = X_n + n.}$$
4. On rappelle que donner la loi correspond
   - ou à reconnaitre une loi usuelle (uniforme, Bernoulli, binomiale)
   - ou à donner l'univers et les probabilités associées.

Ici la loi n'est pas usuelle. Donnons son univers et ses probabilités. Par les deux questions précédentes, on en déduit que l'univers image de G_n est celui de la binomiale X_n : $[\![0;n]\!]$ translaté de n :

$$G_n(\Omega) = [\![n;2n]\!].$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![n;2n]\!], \qquad \mathbb{P}(G_n = k) &= \mathbb{P}(X_n + n = k) && \text{par la question précédente} \\
&= \mathbb{P}(X_n = k-n) \\
&= \binom{n}{k-n} \frac{1}{3^{k-n}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-(k-n)} && \text{car } X_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right) \\
&= \binom{n}{k-n} \frac{2^{2n-k}}{3^n}.
\end{aligned}$$

On peut aussi observer que $\binom{n}{k-n} = \binom{n}{n-(k-n)} = \binom{n}{2n-k}$ si besoin. Conclusion,

$$\boxed{G_n(\Omega) = [\![n;2n]\!], \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![n;2n]\!], \quad \mathbb{P}(G_n = k) = \binom{n}{k-n} \frac{2^{2n-k}}{3^n}.}$$

Ce qui est naturellement cohérent avec la question 1.