Exercice Printemps 08
Continuité-dérivabilité - Séries

Solution de l'exercice 1

1. Pour tout $x \neq 0$, $|x| > 0$ et donc $\ln(|x|)$ existe. Pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ et donc $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existent aussi. Enfin pour tout $x \neq 0$, on a
$$\frac{1}{\ln(|x|)} \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|x|) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \{-1;1\}.$$
De plus $f(0)$ est bien définie. Conclusion,
$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}.}$$
Notons $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ cet ensemble.

2. Montrons que f est une fonction paire.
   - L'ensemble $\mathscr{D}$ de définition de f est centré en 0.
   - Pour tout $x \in \mathscr{D} \setminus \{0\}$, on a, par parité de $|\cdot|$ et de cos,
   $$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\ln(|-x|)} \cos\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{x^2}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$
   De plus si $x = 0$,
   $$f(-0) = f(0).$$

   Conclusion,
$$\boxed{f \text{ est paire.}}$$

3. Pour tout $x \in]0;1[$, on a
$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{\ln(x)} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1$. Donc pour tout $x > 0$,
$$|f(x)| \leqslant \frac{x^2}{\ln(x)}.$$
Or
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$
Donc (pas de forme indéterminée inutile de sortir ses gros sabots de croissance comparée),
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2}{\ln(x)} = 0.$$
Donc par le théorème d'encadrement $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} |f(x)| = 0$ i.e. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$. Puis par parité,
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0.$$
Ainsi,
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = f(0).$$
Autrement dit
$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$$

4. Appliquons le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
   - La fonction f est définie et continue sur $]-1;1[$.
   - La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;1[\setminus\{0\}$ en tant que produit et composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur cet ensemble. De plus pour tout $x\in\,]-1;1[\setminus\{0\}$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\
&= \frac{2x}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2(\ln(|x|))'}{\ln^2(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{\ln(|x|)}\left(\frac{1}{x}\right)'\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{2x}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2\frac{1}{x}}{\ln^2(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{\ln(|x|)}\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(|x|)} - \frac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2(|x|)} + \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(|x|)}
\end{aligned}$$

Donc par l'inégalité triangulaire et le fait que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|\cos(t)|\leqslant 1$ et $|\sin(t)|\leqslant 1$, on obtient que pour tout $x\in\,]-1;1[\setminus\{0\}$

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2|x|}{|\ln(|x|)|} + \frac{|x|}{\ln^2(|x|)} + \frac{1}{|\ln(|x|)|}$$

Or (toujours pas de croissance comparée, non non)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{2|x|}{|\ln(|x|)|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{|x|}{\ln^2(|x|)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{|\ln(|x|)|} = 0.$$

Donc par encadrement on obtient

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} |f'(x)| = 0.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0.$$

De ces deux points et du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0}$ et

$$\boxed{f'(0)=0.}$$

Solution de l'exercice 2 On a pour tout $n\geqslant 2$,

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2\ln\left(\frac{1}{n}\right)}\cos(n) = -\frac{\cos(n)}{n^2\ln(n)}.$$

Dès lors,

$$\forall n\geqslant 2,\qquad |u_n| = \frac{|\cos(n)|}{n^2|\ln(n)|} \leqslant \frac{1}{n^2|\ln(n)|}.$$

Or pour tout $n\geqslant 3$, $\ln(n)\geqslant 1$. Donc

$$\forall n\geqslant 3,\qquad 0\leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum\limits_{n\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha=2>1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\geqslant 2}|u_n| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} u_n \text{ converge.}}$$