Correction Printemps 09
Suites - Représentation matricielle

Solution de l'exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$ l'assertion « u_n est de même signe que u_0 ». Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie par récurrence.
   - *Initialisation.* Si $n = 0$, alors u_0 est de même signe que u_0 donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors u_n est de même signe que u_0. Or, par définition, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$ et naturellement $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$. Donc u_{n+1} est de même signe que u_n et par transitivité, u_{n+1} est de même signe que u_0. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.
   - *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de même signe que u_0. Conclusion,
   $$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de signe constant,}}$$
   celui de u_0 notamment.

2. On suppose $u_0 \geqslant 0$. Donc par la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ i.e. $-u_n \leqslant 0$. Donc par croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant 1$. Ainsi, $u_n \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n$ car u_n est positif. Donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n.$$
   Autrement dit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or cette suite étant positive elle est minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité de la fonction $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n \mathrm{e}^{-u_n} = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell}.$$
   Or $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ en tant que suite extraite. Donc par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$ on en déduit que
   $$\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ell = 0 \\ 1 = \mathrm{e}^{-\ell} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ell = 0 \\ \ell = -\ln(1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 0.$$
   Conclusion, $\boxed{\text{si } u_0 \geqslant 0, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

3. On suppose maintenant que $u_0 < 0$. Alors d'après la question 1, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} u_n \leqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant \mathrm{e}^0 = 1 && \text{par croissance de l'exponentielle} \\ &\Rightarrow \quad u_n \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n && \text{car} u_n \leqslant 0 \\ &\Rightarrow \quad u_{n+1} \leqslant u_n. \end{aligned}$$
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à nouveau décroissante. Donc par le théorème de croissance monotone, deux cas sont possibles :
   (i) la suite converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$,
   (ii) la suite diverge vers $-\infty$.

   Supposons que (i) est réalisé. Alors en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$, on en déduit comme précédemment que $\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell} \;\Leftrightarrow\; \ell = 0$. Or on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 < 0$. Donc par passage à la limite dans cette inégalité on en déduit que
   $$\ell \leqslant u_0 < 0.$$

NB : ATTENTION à ne pas dire $u_n < 0$ implique $\ell < 0$ qui est faux en général ! ! Exemple $u_n = -\frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc montré que $\ell = 0$ et $\ell < 0$ ce qui est contradictoire. Le cas (i) est donc impossible et donc (ii) est vraie : $\boxed{\text{si } u_0 < 0 \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } -\infty}$.

Solution de l'exercice 2

1. Par définition, f est linéaire. De plus,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 = A$. Ainsi, $f^2 = f$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}_2[X].}$$

2. Par la question précédente, on en déduit directement que

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = \mathbb{R}_2[X].}$$

3. Par ce qui précède, $(P_1, P_2) = \left(X + 2, X^2 + 2X + 1\right)$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$. D'autre part, $(P_3) = \left(X^2 + 3X + 3\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Donc par le théorème de la base adaptée,

$$\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3) = \left(X + 2, X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 3\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].$$

Puisque f est un projecteur, on sait que $\operatorname{Im}(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(P) = P\}$. Donc,

$$f(P_1) = P_1 \qquad \text{et} \qquad f(P_2) = P_2.$$

Enfin, puisque $P_3 \in \operatorname{Ker}(f)$, $f(P_3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$