Correction Printemps 10
Polynômes - Intégration

Solution de l'exercice 1

1. On a
$$P' = 4X^3 - 6X^2 + 6X - 2.$$
Donc
$$P - X^4 = -2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 = -\frac{1}{2}\left(4X^3 - 6X^2 + 6X - 2\right) + X.$$
Posons $R = X$ et $Q = -\frac{1}{2}$. Alors, on a bien $P - X^4 = QP' + R$ avec
$$\deg(R) = 1 < 3 = \deg(P').$$
Donc on obtient la division euclidienne suivante :
$$\boxed{P - X^4 = -\frac{1}{2}P' + X.}$$

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P et de P'. Alors $P(a) = P'(a) = 0$. Donc par la question précédente,
$$\begin{aligned}
& P(a) - a^4 = -\frac{1}{2}P'(a) + a \\
\Leftrightarrow\quad & -a^4 = a \\
\Leftrightarrow\quad & a^4 + a = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a\left(a^3 + 1\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \text{ OU } a^3 = -1 \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \text{ OU } \exists k \in \{0;1;2\}, \quad a = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2ik\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \text{ OU } a = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 \text{ OU } a = \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \text{ OU } a = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = -j.
\end{aligned}$$
Vérifions parmi ces possibilités, lesquelles sont réellement racines de P et de P'.
   - Si $a = 0$, alors $P(a) = 1 \neq 0$, donc $a = 0$ n'est pas une solution.
   - Si $a = -1$, alors $P(a) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 \neq 0$ donc $a = -1$ n'est pas une solution.
   - Si $a = -j$. Rappelons que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$. Donc
   $$\begin{aligned}
   P(a) = P(-j) &= (-j)^4 - 2(-j)^3 + 3(-j)^2 - 2(-j) + 1 \\
   &= j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 \\
   &= j + 2 + 3j^2 + 2j + 1 \\
   &= 3\left(j^2 + j + 1\right) = 0.
   \end{aligned}$$
   De plus,
   $$\begin{aligned}
   P'(a) = P'(-j) &= 4(-j)^3 - 6(-j)^2 + 6(-j) - 2 \\
   &= -4j^3 - 6j^2 - 6j - 2 \\
   &= -4 - 6j^2 - 6j - 2 \\
   &= -6\left(j^2 + j + 1\right) = 0.
   \end{aligned}$$
   Donc $-j$ est une racine de P et de P'.

- Notons que P et P' sont à coefficients réels. Donc puisque $-j$ est une racine de P et de P' alors, $\overline{-j}$ est aussi une racine de P et de P' i.e. $-j^2$ est une racine de P et de P'.

Conclusion,

$$\boxed{\text{les racines communes à } P \text{ et } P' \text{ sont } -j \text{ et } -j^2.}$$

3. D'après la question précédente, $-j$ et $-j^2$ sont deux racines distinctes de P de multiplicité au moins 2 de P. Or
$$\deg(P) = 4 = 2+2.$$
Donc P ne peut pas avoir d'autre racine et $-j$ et $-j^2$ sont de multiplicité 2 exactement. Par conséquent,
$$P = \lambda\,(X-(-j))^2\left(X-(-j^2)\right)^2,$$
avec λ le coefficient dominant de P : c'est-à-dire ici $\lambda = 1$. On obtient alors la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$:
$$\boxed{P = (X+j)^2\left(X+j^2\right)^2.}$$
Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on rassemble les racines non réelles qui sont conjuguées :
$$P = \left((X+j)\left(X+j^2\right)\right)^2 = \left(X^2+\left(j+j^2\right)X+j^3\right)^2 = \left(X^2-X+1\right)^2,$$
car $1+j+j^2=0 \;\Rightarrow\; j+j^2=-1$. Conclusion, la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est
$$\boxed{P = \left(X^2-X+1\right)^2.}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\arcsin(\sqrt{|t|})}$. La fonction f est définie et même continue sur $[-1;0[\cup]0;1]$ comme composée de fonctions usuelles. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que la borne inférieur soit dans le domaine de continuité de f, on note déjà qu'il faut que $x \in [-1;0[\cup]0;1]$. D'autre part si $x<0$, alors $0 \in [x;x^2]$ et donc $[x;x^2]$ n'est pas inclus dans $[-1;0[\cup]0;1]$. Si $x \in]0;1]$, alors $0 < x^2 < x \leqslant 1$. Donc $[x^2;x] \subseteq]0;1]$. Donc f est continue sur $[x^2;x]$. Donc
$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\arcsin(\sqrt{|t|})} \text{ existe.}$$
Conclusion, le domaine de définition de φ est
$$\boxed{\mathscr{D} =]0;1].}$$

2. Soit $x \in]0;1]$. Puisque f est continue sur $]0;1]$, elle admet des primitives sur cet intervalle. Soit F une primitive de f sur cet INTERVALLE. Alors par le théorème fondamental de l'analyse, puisque $[x^2;x] \subseteq]0;1]$,
$$\varphi(x) = F\left(x^2\right) - F(x).$$
Puisque f est continue, F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1]$. Donc par composée et différence de fonctions $\mathscr{C}^1$, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0;1]}$ et
$$\boxed{\forall x \in]0;1], \qquad \varphi'(x) = 2xf\left(x^2\right) - f(x) = \frac{2x}{\arcsin(x)} - \frac{2}{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)}.}$$

3. Posons $h : t \mapsto \arcsin(t) - t$. La fonction h est définie et même dérivable sur $[0;1[$ et pour tout $t \in [0;1[$,

$$h'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1 = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Or $1 - t^2 \leqslant 1$, donc $1 - \sqrt{1-t^2} \geqslant 0$. Donc

$$\forall t \in \left]0;1\right[, \qquad h'(t) \geqslant 0.$$

Donc la fonction h est croissante sur $[0;1[$ et par continuité sur $[0;1[$. Or $h(0) = 0$. Donc

$$\forall t \in [0;1[, \quad h(t) \geqslant h(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in [0;1[, \quad \arcsin(t) \geqslant t.$$

Soit $x \in]0;1[$. Pour tout $t \in [x^2;x]$, on a $\sqrt{t} \in]0;1]$, donc $\arcsin\left(\sqrt{t}\right) \geqslant \sqrt{t} > 0$. Par passage à l'inverse

$$\forall t \in \left[x^2;x\right], \qquad \frac{1}{\arcsin\left(\sqrt{t}\right)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $x^2 \leqslant x$,

$$0 \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\arcsin\left(\sqrt{t}\right)}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\right]_{t=x^2}^{t=x} = \frac{\sqrt{x}-x}{2} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

D'où,

$$0 \geqslant \varphi(x) \geqslant -\frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Or $-\frac{\sqrt{x}}{2} \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\longrightarrow} 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \varphi(x) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \varphi(0) = 0.}$$