



## Exercice Printemps 11

### Applications linéaires - Probabilités

**Exercice 1** On pose  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et on définit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P.\end{aligned}$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer  $\text{Im}(\varphi)$ ,  $\text{Ker}(\varphi)$  et préciser leur dimension.
3. En déduire  $\varphi^2$ .
4. Montrer que pour tout  $Q \in \text{Im}(\varphi)$  il existe un unique  $P \in E$  tel que 
$$\begin{cases} \varphi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0 \end{cases} .$$

**Exercice 2** On possède une urne avec 6 boules rouges. On lance un dé à 6 faces équilibrés. On peint en vert le nombre de boules indiqué par le dé. Puis on pioche une boule dans l'urne.

1. Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule verte.
2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu 6 au dé sachant que l'on a obtenu une boule verte.
3. Au lieu de piocher une seule boule, on en pioche cinq sans remise. Calculer la probabilité de n'avoir obtenu que des boules vertes.