Correction Printemps 11
Applications linéaires - Probabilités

Solution de l'exercice 1

1. On a les deux points suivants :
   - Si $P \in E$, alors $\varphi(P)$ existe bien dans $\mathbb{R}[X]$ et
   $$\begin{aligned}\deg(\varphi(P)) &= \deg(P(X+1)+P(X-1)-2P)\\ &\leqslant \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X-1)), \deg(2P))\\ &= \max(\deg(P)\times\deg(X+1), \deg(P)\times\deg(X-1), \deg(2)+\deg(P))\\ &= \max(\deg(P)\times 1, \deg(P)\times 1, 0+\deg(P))\\ &= \deg(P)\end{aligned}$$
   Donc
   $$\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant 3.$$
   Donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ et φ est une application de E dans E.
   - Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P,Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+\mu Q) = \varphi(R) &= R(X+1)+R(X-1)-2R\\ &= (\lambda P+\mu Q)\circ(X+1)-(\lambda P+\mu Q)\circ(X-1)-2(\lambda P+\mu Q)\\ &= \lambda(P(X+1)+P(X-1)-2P)+\mu(Q(X+1)+Q(X-1)-2Q)\\ &= \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q).\end{aligned}$$
   Donc φ est linéaire.

   Conclusion,
   $$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(E) \text{ i.e. est un endomorphisme de } E.}$$
2. On sait que $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}_3[X]$ et donc est une famille génératrice de E. Ainsi,
   $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\varphi(1), \varphi(X), \varphi\left(X^2\right), \varphi\left(X^3\right)\right).$$
   Calculons,
   $$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1+1-2 = 0_E\\ \varphi(X) &= X+1+X-1-2X = 0_E\\ \varphi\left(X^2\right) &= (X+1)^2+(X-1)^2-2X^2 = X^2+2X+1+X^2-2X+1-2X^2 = 2\\ \varphi\left(X^3\right) &= (X+1)^3+(X-1)^3-2X^3 = X^3+3X^2+3X+1+X^3-3X^2+3X-1-2X^3 = 6X.\end{aligned}$$
   Ainsi, on observe que $1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et
   $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(0_E, 0_E, 2, 6X) = \mathrm{Vect}(2, 6X) = \mathrm{Vect}(1, X) \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow \frac{1}{2}C_1 \\ C_2 \leftarrow \frac{1}{6}C_2 \end{array}$$
   On reconnait la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ et on en déduit donc que
   $$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_1[X]} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2.}$$

Par le théorème du rang, on en déduit également que

$$\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}(f)) = 4 - 2 = 2.}$$

Or nous avons vu que $1 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ et $X \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ donc, puisque $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un espace vectoriel,

$$\mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect}(1, X) \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi).$$

Puis par égalité des dimensions, $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2 = \dim(\operatorname{Ker}(\varphi))$, on en conclut que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_1[X].}$$

3. Soit $P \in E$. On a bien entendu $\varphi(P) \in \operatorname{Im}(\varphi)$. Or par la question précédente,

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Ker}(\varphi).$$

Donc $\varphi(P) \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Ainsi

$$\varphi^2(P) = \varphi(\varphi(P)) = 0_E.$$

Ceci étant vrai pour tout $P \in E$, on en conclut que

$$\boxed{\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

4. Soit $Q \in \operatorname{Im}(\varphi)$. Par la question 2, on a $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_1[X]$. Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q = aX + b$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \varphi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(P) = Q \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(a_2X^2 + a_3X^3) = Q \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2\,\varphi(X^2) + a_3\,\varphi(X^3) = Q \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{car } \varphi \text{ est linéaire.} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_2 + 6a_3X = aX + b \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{en utilisant les calculs de la question 2.} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = \frac{b}{2} \\ a_3 = \frac{a}{6} \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme.} \\
&\Leftrightarrow \quad P = \frac{b}{2}X^2 + \frac{a}{6}X^3.
\end{aligned}$$

On a donc bien trouvé une et une seule solution et donc

$$\boxed{\forall Q \in \operatorname{Im}(\varphi),\ \exists! P \in E, \qquad \begin{cases} \varphi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0. \end{cases}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Notons X le résultat du dé et V l'évènement « obtenir une boule verte ». On cherche $\mathbb{P}(V)$. Puisque $(X = i)_{i \in [\![1;6]\!]}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(V \mid X = i)\,\mathbb{P}(X = i).$$

Puisque le dé est équilibré, $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1;6 \rrbracket)$ i.e. pour tout $i \in \llbracket 1;6 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{6}$. D'autre part, pour $i \in \llbracket 1;6 \rrbracket$, si $X = i$ est réalisé, l'urne contient i boules vertes et $6-i$ boules rouges. Donc en effectuant un tirage uniforme parmi les boules : $\mathbb{P}(V \mid X=i) = \frac{i}{6}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{36}\frac{6\times 7}{2} = \frac{7}{12}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(V) = \frac{7}{12}.}$$

2. On cherche $\mathbb{P}(X=6 \mid V)$. Par la question précédente, $\mathbb{P}(V) \neq 0$. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(X=6 \mid V) = \frac{\mathbb{P}(V \mid X=6)\,\mathbb{P}(X=6)}{\mathbb{P}(V)}.$$

Par la question précédente, $\mathbb{P}(V) = \frac{7}{12}$ et nous avons vu que $\mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(V \mid X=6) = 1$ (l'urne ne contient dans ce cas que des boules vertes). Donc

$$\mathbb{P}(X=6 \mid V) = \frac{1/6}{7/12} = \frac{2}{7}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X=6 \mid V) = \frac{2}{7}.}$$

3. Au lieu de piocher une seule boule, on en pioche cinq sans remise. On garde toujours la variable X mais l'on note désormais V_i l'évènement « piocher une boule verte au tirage i » et W l'évènement « piocher 5 boules vertes ». On cherche donc $\mathbb{P}(W)$ et on observe que $W = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5$. Puisque $(X=i)_{i\in\llbracket 1;6 \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(W) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(W \cap (X=i)).$$

On note que si $X \leqslant 4$, alors l'urne ne contiendra pas 5 boules vertes, il sera donc impossible de réaliser W. Donc $(X \leqslant 1)$ est incompatible avec W. Ainsi,

$$\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \mathbb{P}(W \cap (X=5)) + \mathbb{P}(W \cap (X=6)).$$

D'une part, si $X = 6$ alors, il n'y a que des boules vertes dans l'urne et donc W est automatiquement réalisé i.e. $(X=6) \subseteq W$ et donc $W \cap (X=6) = (X=6)$. D'où

$$\mathbb{P}(W \cap (X=6)) = \mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{6}.$$

D'autre part, par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W \cap (X=5)) =& \mathbb{P}(V_5 \mid (X=5) \cap V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4)\\ & \mathbb{P}(V_4 \mid (X=5) \cap V_1 \cap V_2 \cap V_3)\\ & \mathbb{P}(V_3 \mid (X=5) \cap V_1 \cap V_2)\\ & \mathbb{P}(V_2 \mid (X=5) \cap V_1)\,\mathbb{P}(V_1 \mid X=5)\,\mathbb{P}(X=5).\end{aligned}$$

On sait que $\mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{6}$. Puis, si $X = 5$, alors l'urne contient 5 boules vertes parmi 6 :

$$\mathbb{P}(V_1 \mid X=i) = \frac{5}{6}.$$

De même si $(X=5)\cap V_1$ est réalisé, on avait 5 boules vertes puis l'on en a retiré une. Donc il nous reste 4 boules vertes parmi 5 :

$$\mathbb{P}\left(V_2 \mid (X=i)\cap V_1\right) = \frac{4}{5}.$$

De même, pour les autres probabilités :

$$\mathbb{P}\left(W \cap (X=5)\right) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(W\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(W\right) = \frac{7}{36}.}$$