Chapitre XXII : Intégration

L'objectif de ce chapitre est de définir rigoureusement l'intégrale au sens de Riemann en tant que limite de fonctions en escaliers. « L'aire sous la courbe est l'aire limite de rectangles approchant la courbe ».

I Les fonctions en escalier

Définition I.1

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

- On appelle **subdivision de** $[a;b]$ toute famille $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$, $n \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- La subdivision particulière $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ définie pour tout $i \in [\![0;n]\!]$ par $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ est appelée **subdivision régulière** ou **à pas constant**.

Remarque 1 :

1. Si $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une subdivision à pas constant alors

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$

2. Si $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une subdivision de $[a;b]$, alors $[a;b[= \bigsqcup_{i\in[\![0;n-1]\!]} [x_i;x_{i+1}[$ et $]a;b] = \bigsqcup_{i\in[\![0;n-1]\!]}]x_i;x_{i+1}]$.
3. Il n'y a pas bien entendu unicité de la subdivision. Une subdivision est juste une façon de découper l'intervalle $[a;b]$ en n morceaux distincts.

Définition I.2

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $\varphi \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$. On dit que φ est **une fonction en escalier** si et seulement s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ telle que pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, φ est constante sur $]x_i;x_{i+1}[$ i.e.

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!],\ \exists C_i \in \mathbb{R},\ \forall x \in\ ]x_i;x_{i+1}[\,, \qquad \varphi(x) = C_i.$$

Remarque 2 :

1. Une fonction en escalier est « une fonction constante par morceaux ».
2. La fonction φ reste constante sur les intervalles $]x_i;x_{i+1}[$ mais fait ce qu'elle veut aux points x_i.
3. Si $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ est une subdivision pour laquelle φ est constante sur chacun des intervalles ouverts, alors on dit que σ est adaptée à φ.
4. Pour être en escalier il faut donc l'existence d'une subdivision adaptée. Mais l'unicité d'une subdivision adaptée n'est pas garantie. A contrario, pour toute fonction en escalier, il existe une infinité de subdivisions adaptées (on peut toujours redécouper les intervalles d'une subdivision en intervalles plus petits et la fonction φ restera bien constante sur chacun des intervalles).

Définition I.3

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On note $\mathscr{E}([a;b])$ l'ensemble des fonctions en escalier définie sur $[a;b]$.

Remarque 3 :

1. Une fonction en escalier est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et donc peut prendre des valeurs négatives.
2. Une fonction φ en escalier prend au plus $2n+1$ valeurs : n valeurs possibles pour les n intervalles $]x_i;x_{i+1}[$ et $n+1$ valeurs aux points x_i. En particulier, φ est bornée.
3. A part les fonctions constantes sur $[a;b]$ tout entier, aucune fonction en escalier n'est continue ni a fortiori dérivable ou $\mathscr{C}^1$.

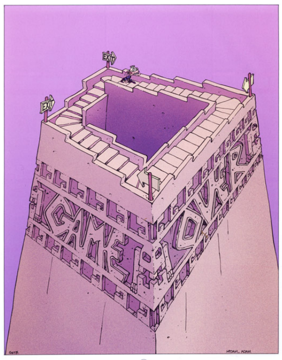
4. La fonction partie entière est une fonction en escalier sur $[a;b]$.

Proposition I.4

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. L'ensemble $\mathscr{E}([a,b])$ des fonctions en escalier est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a;b],\mathbb{R})$.

Démonstration. Par définition $\mathscr{E}([a,b])$ est inclus dans $\mathscr{F}([a;b],\mathbb{R})$ et il est clair que la fonction nulle sur $[a;b]$ tout entier est une fonction en escalier.
Soient φ et $\psi\in\mathscr{E}([a;b])$ deux fonctions en escalier sur $[a;b]$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ un couple de réels. Il existe $p,n\in\mathbb{N}^*$ deux entiers, $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$ deux subdivisions adaptées respectivement à φ et ψ. On ordonne les éléments $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}\cup(y_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$ ensemble et on note

$$\begin{aligned}
z_0 &= a\\
z_1 &= \min\{x_1,\dots x_n,y_1,\dots,y_p\}\\
z_2 &= \min(\{x_1,\dots x_n,y_1,\dots,y_p\}\setminus\{z_1\})\\
z_3 &= \min(\{x_1,\dots x_n,y_1,\dots,y_p\}\setminus\{z_1,z_2\})\\
&\ \vdots\\
z_r &= b.
\end{aligned}$$



où $r=n+1+p+1-\mathrm{Card}(\{i\in[\![0;n]\!]\mid\exists j\in[\![0;p]\!],\ x_i=y_j\})=n+1+p+1-\mathrm{Card}(\{j\in[\![0;p]\!]\mid\exists i\in[\![0;n]\!],\ x_i=y_j\})$.
On vérifie alors que la subdivision $(z_i)_{i\in[\![0;r]\!]}$ est une subdivision adaptée à la fois à φ (car on a juste ajouté des éléments à la famille $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$) et à la fois à ψ (car on a juste ajouté des éléments à la famille $(y_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$). On a donc pour tout $i\in[\![0;r-1]\!]$,

$$\exists C_i^1,C_i^2\in\mathbb{R},\ \forall x\in\,]z_i;z_{i+1}[\,,\qquad\varphi(x)=C_i^1\qquad\text{et}\qquad\psi(x)=C_i^2.$$

D'où,

$$\forall i\in[\![0;r-1]\!],\ \exists C_i=\lambda C_i^1+\mu C_i^2\in\mathbb{R},\ \forall x\in\,]z_i;z_{i+1}[\,,\qquad(\lambda\phi+\mu\psi)(x)=\lambda C_i^1+\mu C_i^2=C_i.$$

Autrement dit la fonction $\lambda\phi+\mu\psi$ est une fonction en escalier sur $[a;b]$ dont une subdivision adaptée est $(z_i)_{i\in[\![0;r]\!]}$.
Conclusion, $\mathscr{E}([a;b])$ est stable par combinaisons linéaires et forme donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a;b],\mathbb{R})$. □

Proposition I.5

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, $\varphi\in\mathscr{E}([a;b])$. Pour toute subdivision $x=(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ adaptée à φ, on note

$$I_{[a;b]}(\varphi,x)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i(x_{i+1}-x_i),$$

où pour tout $i\in[\![0;n-1]\!]$, c_i est l'unique valeur prise par φ sur $]x_i;x_{i+1}[$.
Alors, si x et y sont deux subdivisions adaptées à φ, on a $I_{[a;b]}(\varphi,x)=I_{[a;b]}(\varphi,y)$.

Démonstration. (Pour les plus à l'aise, à passer en première lecture). Soient x et y deux subdivisions d'une même fonction en escalier φ alors nécessairement x est une sous-famille de y OU y est une sous-famille de x. On dit que l'une des subdivisions est plus fine que l'autre. Par symétrie des hypothèses, on peut supposer que x est une sous-famille de y. Notons $x=(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$. Puisque x est une subdivision adaptée à φ, il existe $(c_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ tel que

$$\forall i\in[\![0;n-1]\!],\ \forall t\in\,]x_i;x_{i+1}[\,,\qquad\varphi(t)=c_i.$$

Notons également $y=(y_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$. Puisque x est une sous-famille de y, il existe $p_0,p_1,p_2,\dots,p_n\in[\![0;p]\!]$ tels que pour tout $i\in[\![0;n]\!]$, $y_{p_i}=x_i$. Notamment, $p_0=0$ et $p_n=p$. Notez que

$$[\![0;p-1]\!]=\bigsqcup_{i\in[\![0;n-1]\!]}[\![p_i;p_{i+1}-1]\!]\tag{1}$$

Enfin puisque y est adaptée à φ, il existe $(\tilde{c}_j)_{j\in[\![0;p-1]\!]}$ tel que

$$\forall j \in [\![0; p-1]\!],\ \forall t \in]y_j; y_{j+1}[, \qquad \varphi(t) = \tilde{c}_i.$$

Avec ces notations, on remarque que pour $i \in [\![0; n-1]\!]$ et $j \in [\![p_i; p_{i+1}-1]\!]$, on a $]y_j; y_{j+1}[\subseteq]x_i; x_{i+1}[$ donc si $t \in]y_j; y_{j+1}[$ alors $t \in]x_i; x_{i+1}[$ et donc pour un tel t, on a $\tilde{c}_j = \varphi(t) = c_i$. On a donc montré que

$$\forall i \in [\![0; n-1]\!],\ \forall j \in [\![p_i; p_{i+1}-1]\!], \qquad \tilde{c}_j = c_i. \tag{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_{[a;b]}(\varphi, y) = \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{c}_j (y_{j+1} - y_j) &\underset{(1)}{=} \sum_{j \in \bigsqcup_{i\in[\![0;n-1]\!]} [\![p_i;p_{i+1}-1]\!]} \tilde{c}_j (y_{j+1} - y_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j\in[\![p_i;p_{i+1}-1]\!]} \tilde{c}_j (y_{j+1} - y_j) \\
&\underset{(2)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j\in[\![p_i;p_{i+1}-1]\!]} c_i (y_{j+1} - y_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \sum_{j\in[\![p_i;p_{i+1}-1]\!]} (y_{j+1} - y_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i (y_{p_{i+1}} - y_{p_i}) \\
&\underset{\text{déf des } p_i}{=} \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) = I_{[a;b]}(\varphi, x).
\end{aligned}$$

□

Définition I.6

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$. On appelle **intégrale** l'unique réel $I_{[a;b]}(\varphi)$ tel que pour toute subdivision x adaptée à φ,

$$I_{[a;b]}(\varphi) = I_{[a;b]}(\varphi, x).$$

Remarque 4 :

1. Lorsque φ est positive, $I_{[a;b]}(\varphi)$ est l'aire sous la courbe de φ.
2. L'intégrale $I_{[a;b]}(\varphi)$ « ne voit pas » les points $(x_i, \varphi(x_i))$. Plus précisément, la valeur de l'intégrale $I_{[a;b]}(\varphi)$ ne dépend pas des valeurs prises par φ aux points x_i.

Proposition I.7

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $(\varphi, \psi) \in \mathscr{E}([a;b])^2$.

1. *Linéarité.* Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ alors
$$I_{[a;b]}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda I_{[a;b]}(\varphi) + \mu I_{[a;b]}(\psi).$$
2. *Positivité/croissance.*
   (a) Si pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) \geqslant 0$ alors $I_{[a;b]}(\varphi) \geqslant 0$.
   (b) Si pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ alors $I_{[a;b]}(\varphi) \leqslant I_{[a;b]}(\psi)$.
3. *Séparation.* On suppose que pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) \geqslant 0$ et que $I_{[a;b]}(\varphi) = 0$. Alors φ est nulle sur $[a;b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points (les points d'une subdivision adaptée).
4. *Relation de Chasles.* Soit $c \in]a;b[$. Alors $I_{[a;c]}(\varphi) + I_{[c;b]}(\varphi) = I_{[a;b]}(\varphi)$.

Démonstration. On a vu dans la démonstration de la proposition I.4, que si φ et ψ sont deux fonctions en escalier alors il existe $x = (x_i)_{i\in[\![0;n}$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à φ et à ψ et par suite à $\lambda\,\varphi+\mu\psi$. Donc il existe $(c_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ et $(\tilde{c}_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ deux familles de réels telles que

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!],\ \forall x \in \,]x_i;x_{i+1}[\,, \qquad \varphi(x) = c_i \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \tilde{c}_i.$$

1. On a donc,

$$\begin{aligned} I_{[a;b]}\left(\lambda\,\varphi+\mu\psi\right) &= \sum_{i=0}^{n} \left(\lambda\, c_i + \mu\tilde{c}_i\right)\left(x_{i+1}-x_i\right) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right) + \mu \sum_{i=0}^{n} \tilde{c}_i\left(x_{i+1}-x_i\right) = \lambda\, I_{[a;b]}\left(\varphi\right) + \mu I_{[a;b]}\left(\psi\right). \end{aligned}$$

2. (a) Si $\varphi \geqslant 0$, alors pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, $c_i \geqslant 0$ et donc

$$I_{[a;b]}\left(\varphi\right) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{c_i}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(x_{i+1}-x_i\right)}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

   (b) Si $\psi \geqslant \varphi$, alors $\psi - \varphi \geqslant 0$ et donc par le point précédent, $I_{[a;b]}\left(\psi-\varphi\right) \geqslant 0$ donc par linéarité $I_{[a;b]}\left(\psi\right) - I_{[a;b]}\left(\varphi\right) \geqslant 0$ i.e. $I_{[a;b]}\left(\psi\right) \geqslant I_{[a;b]}\left(\varphi\right)$.

3. Si $\varphi \geqslant 0$, alors pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, $c_i \geqslant 0$ et donc $I_{[a;b]}\left(\varphi\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$ est une somme de termes positifs qui par hypothèse vaut 0. Donc chaque terme est nul (faire par l'absurde) donc pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, $c_i\left(x_{i+1}-x_i\right) = 0$ or $x_{i+1} > x_i$ par définition d'une subdivision, donc $c_i = 0$. Donc $\forall x \in [a;b] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$, $\varphi(x) = 0$.
4. Soit $(x_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ une subdivision adaptée à φ sur $[a;b]$ et soit $c \in \,]a;b[$. Si c n'est pas un élément de la subdivision $(x_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$, on le rajoute on l'on obtient alors une nouvelle subdivision plus fine que la précédente toujours adaptée à φ. On note encore $(x_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ cette nouvelle subdivision et on pose $i_0 \in [\![1;n-1]\!]$ l'indice tel que $x_{i_0} = c$. On a alors

$$I_{[a;b]}\left(\varphi\right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right) = \sum_{i=0}^{i_0-1} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right) + \sum_{i=i_0}^{n-1} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right) = I_{[a;c]}\left(\varphi\right) + I_{[c;b]}\left(\varphi\right).$$

□

II Construction de l'intégrale

On rappelle que l'on note $\mathscr{C}\left([a;b],\mathbb{R}\right)$ ou plus simplement $\mathscr{C}\left([a;b]\right)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème II.1 (Approximation de Weierstrass)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}\left([a;b]\right)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathscr{E}\left([a;b]\right)$ telle que

$$\forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Remarque 5 : Autrement dit on peut approcher toute fonction continue *uniformément* (pour tous les x en même temps) à ε-près par une fonction en escalier.

Démonstration. Ce théorème est admis sous sa formulation la plus générale donnée ci-dessus. Démontrons le résultat lorsque f n'est pas seulement continue mais $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Supposons donc $f \in \mathscr{C}^1\left([a;b]\right)$. Alors f est dérivable, de dérivée continue. Donc f' est une fonction continue sur le **segment** $[a;b]$. Donc f' est bornée sur $[a;b]$:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [a;b], \qquad |f'(x)| \leqslant M.$$

Et donc par le théorème des accroissements finis, la fonction f est M-lipschitzienne. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la subdivision régulière d'ordre n de $[a;b]$: on pose

$$\forall i \in [\![0;n]\!], \qquad x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Alors on a bien $x_0 = a$, $x_n = b$ et on observe que

$$\forall i \in [\![0; n-1]\!], \qquad x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$$

On définit alors

$$\varphi_n \quad : \quad [a;b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x \in [x_i; x_{i+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

La fonction φ_n est bien une fonction en escalier sur $[a;b]$. De plus pour tout $x \in [a;b]$, il existe $i \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $x \in [x_i; x_{i+1}[$ et alors par le théorème des accroissements finis,

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(x_i)| \leqslant \sup_{z \in [x_i; x]} |f'(z)| \, |x - x_i| \, .$$

Or $x \in [x_i; x_{i+1}[$ implique que $|x - x_i| = x - x_i \leqslant x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$. De plus, $\sup_{z \in [x_i;x]} |f'(z)| \leqslant \sup_{z \in [a;b]} |f'(z)| \leqslant M$. Dès lors,

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Il est important de noter que le majorant ne dépend ni de i ni de x. Donc, on en déduit que

$$\forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Maintenant puisque $\frac{M}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε !) et donc une fonction $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que

$$\forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{M}{n} \leqslant \varepsilon \, .$$

□

Corollaire II.2

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(\varphi^-, \varphi^+) \in \mathscr{E}([a;b])^2$ deux fonctions en escalier telles que

$$\forall x \in [a;b], \qquad \varphi^-(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi^+(x) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \varphi^+(x) - \varphi^-(x) \leqslant \varepsilon \, .$$

Remarque 6 : Autrement dit, on peut encadrer *uniformément* (pour tous les $x \in [a;b]$ en même temps) toute fonction continue par une fonction en escalier inférieure à f et une autre fonction en escalier supérieure à f.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que

$$\forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

i.e.

$$\forall x \in [a;b], \qquad \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $\varphi^- = \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\varphi^+ = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$. En tant que somme (ou différence) de deux fonctions en escalier, φ^- est une fonction en escalier et de même pour φ^+ et on vérifie bien d'une part que $\varphi^- \leqslant f \leqslant \varphi^+$ et $\varphi^+ - \varphi^- = \varphi + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$.

□

Proposition II.3

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors

1. L'ensemble $I^- = \left\{ I_{[a;b]}(\varphi^-) \;\middle|\; \varphi^- \in \mathscr{E}([a;b]), \varphi^- \leqslant f \right\}$ admet une borne supérieure.
2. L'ensemble $I^+ = \left\{ I_{[a;b]}(\varphi^+) \;\middle|\; \varphi^+ \in \mathscr{E}([a;b]), \varphi^+ \geqslant f \right\}$ admet une borne inférieure.
3. Les bornes des deux ensembles précédents coïncident.

Démonstration.

1. D'après le corollaire II.2, on sait qu'il existe $\varphi^- \in \mathscr{E}([a;b])$ vérifiant $\varphi^- \leqslant f$ (et même assez proche de f). Même sans ce corollaire, puisque f est continue sur $[a;b]$, alors f est minorée sur $[a;b]$ et donc il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant m$. Donc la fonction constante égale à m est une fonction en escalier inférieure à f et donc I^- est bien un ensemble non vide. Montrons qu'il est majoré. La fonction f est continue sur $[a;b]$. Donc
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a;b], \qquad f(x) \leqslant M.$$
Donc pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$, telle que $\varphi \leqslant f$ on a $\varphi \leqslant M$ sur $[a;b]$. Or la fonction φ_M constante égale à M sur $[a;b]$ est aussi une fonction en escalier. Donc (et seulement parce que les deux fonctions φ et φ_M sont en escalier), par la proposition I.7 on a
$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi_M\right) = M\,(b-a)\,.$$
Conclusion,
$$\forall\,\varphi^- \in \mathscr{E}([a;b]) \text{ telle que } \varphi \leqslant f, \qquad \text{on a} \qquad I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant M\,(b-a)\,.$$
Le majorant étant indépendant de φ^-, on en déduit bien que I^- est majoré. Donc par un théorème du cours, l'ensemble I^- étant une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
2. Similaire au point précédent. On peut aussi considérer $-f$ et relier I^+ de f à I^- de $-f$ et utiliser le point précédent.
3. Notons $\alpha = \sup I^-$ et $\beta = \inf I^+$.
   - Montrons pour commencer que $\alpha \leqslant \beta$. Soient $\varphi^- \in \mathscr{E}([a;b])$ et $\varphi^+ \in \mathscr{E}([a;b])$ deux fonctions en escalier telles que
   $$\varphi^- \leqslant f \leqslant \varphi^+\,.$$
   Alors par croissance de l'intégrale sur les fonctions en escalier,
   $$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right).$$
   Ceci étant vrai pour $\varphi^- \leqslant f$ quelconque, on en déduit que $I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right)$ est un majorant de I^- et que donc (α étant la borne supérieure est le plus petit des majorants)
   $$\alpha \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right).$$
   Ceci étant vrai pour $\varphi^+ \geqslant f$ quelconque, on en déduit que α est un minorant de I^+ et donc
   $$\alpha \leqslant \beta.$$
   - Montrons maintenant que $\alpha \geqslant \beta$. Par le corollaire du théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ_ε^- et φ_ε^+ deux fonctions en escalier sur $[a;b]$ telles que
   $$\varphi_\varepsilon^- \leqslant f \leqslant \varphi_\varepsilon^+ \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \varphi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^- \leqslant \varepsilon\,.$$
   Les premières inégalités impliquent que $I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^-\right) \in I^-$ et $I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^+\right) \in I^+$. Par conséquent,
   $$\alpha \geqslant I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^-\right) \qquad \text{et} \qquad \beta \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^+\right).$$
   Or on sait également $\varphi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^- \leqslant \varepsilon$ donc par croissance et linéarité de $I_{[a;b]}$ sur les fonctions en escalier, on a
   $$I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^+\right) - I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^-\right) \leqslant \varepsilon\,(b-a)\,.$$
   On obtient donc
   $$\beta - \alpha \leqslant \varepsilon\,.$$
   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on conclut que
   $$\beta - \alpha \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta \leqslant \alpha.$$

□

Définition II.4

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. On appelle **intégrale de f sur** $[a;b]$ l'unique réel défini par

$$\sup I^- = \sup \left\{ I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \mid \varphi^- \in \mathscr{E}([a;b]), \varphi^- \leqslant f \right\} = \inf I^+ = \inf \left\{ I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \mid \varphi^+ \in \mathscr{E}([a;b]), \varphi^+ \geqslant f \right\}.$$

On la note $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 7 : Si φ est une fonction constante : $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a;b]$, $\varphi(x) = c$. Alors $\varphi \in \mathscr{E}([a;b]) \cap \mathscr{C}([a;b])$ et on a alors dans ce cas,

$$c(b-a) = I_{[a;b]}(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

III Propriétés de l'intégrale

Proposition III.1 (Linéarité)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f \in \mathscr{C}([a;b])$, $g \in \mathscr{C}([a;b])$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. L'intégrale est linéaire :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par le corollaire du théorème de Weierstrass, il existe φ^+ et φ^- deux fonctions en escalier telles que

$$\varphi^- \leqslant f \leqslant \varphi^+ \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \varphi^+ - \varphi^- \leqslant \varepsilon\,.$$

Donc par définition de l'intégrale de f,

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right).$$

Et par croissance et linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier,

$$0 \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) - I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant \varepsilon\,.$$

On en déduit que

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) \leqslant \varepsilon + I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant \varepsilon + \int_{[a;b]} f.$$

Puis

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \geqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) - \varepsilon \geqslant \int_{[a;b]} f - \varepsilon\,.$$

Autrement dit,

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) - \varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) + \varepsilon\,. \tag{3}$$

De la même façon, il existe ψ^+ et ψ^- deux fonctions en escalier telles que

$$\psi^- \leqslant g \leqslant \psi^+ \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \psi^+ - \psi^- \leqslant \varepsilon$$

et

$$I_{[a;b]}\left(\psi^+\right) - \varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} g \leqslant I_{[a;b]}\left(\psi^-\right) + \varepsilon\,. \tag{4}$$

Supposons $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$. Alors

$$\lambda \varphi^- + \mu\psi^- \leqslant \lambda f + \mu g \leqslant \lambda \varphi^+ + \mu\psi^+$$

De plus, $\lambda \varphi^- + \mu\psi^-$ et $\lambda \varphi^+ + \mu\psi^+$ sont deux fonctions en escalier donc par définition de l'intégrale,

$$I_{[a;b]}\left(\lambda \varphi^- + \mu\psi^-\right) \leqslant \int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) \leqslant I_{[a;b]}\left(\lambda \varphi^+ + \mu\psi^+\right).$$

Par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier

$$\lambda I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right)+\mu I_{[a;b]}\left(\psi^-\right)\leqslant\int_{[a;b]}(\lambda f+\mu g)\leqslant\lambda I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right)+\mu I_{[a;b]}\left(\psi^+\right).$$

En utilisant (3) et (4) (et le fait que $\lambda\geqslant 0$ et $\mu\geqslant 0$) on obtient alors,

$$\lambda\int_{[a;b]}f-\lambda\varepsilon+\mu\int_{[a;b]}g-\mu\varepsilon\leqslant\int_{[a;b]}(\lambda f+\mu g)\leqslant\lambda\int_{[a;b]}f+\lambda\varepsilon+\mu\int_{[a;b]}g+\mu\varepsilon$$

$$\lambda\int_{[a;b]}f+\mu\int_{[a;b]}g-(\lambda+\mu)\varepsilon\leqslant\int_{[a;b]}(\lambda f+\mu g)\leqslant\lambda\int_{[a;b]}f+\mu\int_{[a;b]}g+(\lambda+\mu)\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on en déduit par passage à la limite quand $\varepsilon\to 0$, que

$$\int_{[a;b]}(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_{[a;b]}f+\mu\int_{[a;b]}g.$$

Les cas où λ ou μ sont négatifs se prouvent par des calculs similaires.

□

Proposition III.2 (Positivité/Croissance)

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, $f\in\mathscr{C}([a;b])$, $g\in\mathscr{C}([a;b])$. Alors

1. Si $f\geqslant 0$ sur $[a;b]$, alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0.$$
2. Si $f\leqslant g$ sur $[a;b]$, alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

1. Si $f\geqslant 0$, alors la fonction nulle $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est une fonction en escalier inférieure à f, donc par définition de l'intégrale,
$$0=I_{[a;b]}\left(0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right)\leqslant\int_{[a;b]}(f).$$
2. Si $f\leqslant g$, alors $g-f\geqslant 0$ et donc par le point précédent, $\int_{[a;b]}(g-f)\geqslant 0$. Puis par linéarité de l'intégrale, $\int_{[a;b]}g-\int_{[a;b]}f\geqslant 0\ \Leftrightarrow\ \int_{[a;b]}g\geqslant\int_{[a;b]}f$.

□

Proposition III.3 (Séparation)

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, $f\in\mathscr{F}([a;b])$. Si

1. f est continue sur $[a;b]$,
2. pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\geqslant 0$,
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$

alors pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)=0$.

Démonstration. Procédons par l'absurde, on suppose qu'il existe $x_0\in[a;b]$ tel que $f(x_0)\neq 0$. Puisque f est positive (ou nulle) on en déduit que $f(x_0)>0$. En posant $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$. Par continuité de f, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[x_0-\eta;x_0+\eta]\cap[a;b]$

$$f(x)\geqslant f(x_0)-\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$$

On considère alors la fonction en escalier

$$\begin{aligned}\varphi\quad:\quad&[a;b]\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto\begin{cases}\frac{f(x_0)}{2}&\text{si } x\in[x_0-\eta;x_0+\eta]\cap[a;b]\\ 0&\text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

On vérifie alors que φ est une fonction en escalier et que pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x)$. Donc par définition de l'intégrale,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant I_{[a;b]}(\varphi) = \frac{f(x_0)}{2}\left(\min(x_0+\eta,b) - \max(x_0-\eta,a)\right) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}\eta > 0.$$

Ce qui contredit l'hypothèse $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

□

Proposition III.4 (Relation de Chasles)

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2$, $a < c < b$, $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Pour toute fonction $\varphi^- \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que $\varphi^- \leqslant f$ sur $[a;b]$, par la relation de Chasles pour les fonctions en escaliers, on a

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) = I_{[a;c]}\left(\varphi^-\right) + I_{[c;b]}\left(\varphi^-\right).$$

Or φ^- est une fonction en escalier inférieure à f sur $[a;c]$ et sur $[b;c]$. Donc par définition de l'intégrale sur chacun de ces segments,

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction φ^-, on en déduit que $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est un majorant de I^-. Par définition de la borne supérieure et de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En considérant les fonctions en escalier φ^+ supérieures à f, on en déduit de la même façon que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Proposition III.5 (Intégrale centrée d'une fonction paire/impaire)

Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur $[-a;a]$.

- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Démonstration. Par la relation de Chasles,

$$I = \int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose $s = -t$ dans la première intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_a^0 -f(-s)\,\mathrm{d}s + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a f(-s)\,\mathrm{d}s + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car la variable d'intégration est muette.} \end{aligned}$$

- Si f paire, alors pour tout $t \in [0; a]$, $f(-t) = f(t)$. Donc

$$I = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si f est impaire, alors pour tout $t \in [0; a]$, $f(-t) = -f(t)$. Donc

$$I = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

□

Proposition III.6 (Constance de l'intégrale de longueur T d'une fonction T-périodique)

Soient $T > 0$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit la valeur l'intégrale de f sur n'importe quel segment de longueur T est toujours la même.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $[a; a+T]$ et l'intégrale existe bien. Par la relation de Chasles, (puisque f est continue sur $\mathbb{R}$) on a

$$I = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, par le glissement d'indice $s = t - T$, on a

$$\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(s+T)\,\mathrm{d}s = \int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique.}$$

Ainsi, puisque la variable d'intégration est muette,

$$I = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

IV Inégalités

Proposition IV.1 (Inégalité triangulaire)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Comme f est continue, $|f|$ est aussi continue et donc $\int_a^b |f|$ a un sens. De plus $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, donc par croissance et linéarité de l'intégrale

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b -|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

Proposition IV.2 (Inégalité de la moyenne)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b])^2$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{s\in[a;b]} |f(s)| \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

En particulier si g est la fonction constante égale à 1,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{s\in[a;b]} |f(s)|\,(b-a)\,.$$

Démonstration. Notez que si f et g sont continues sur $[a;b]$ alors il en est de même de fg et de $|g|$. De plus, f étant continue sur le segment $[a;b]$, sa borne supérieure existe (et est atteinte). Donc tous les objets de la proposition sont bien définis. Par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Or répétons que $\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|$ existe car f est continue sur le segment $[a;b]$. De plus, pour tout $t \in [a;b]$, $|f(t)| \leqslant \sup_{s\in[a;b]} |f(s)|$ donc pour tout $t \in [a;b]$, $|f(t)|\,|g(t)| \leqslant \left(\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|\right)|g(t)|$. Donc par croissance de l'intégrale,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left(\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|\right)|g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, $\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|$ est un réel fixé. Donc par linéarité de l'intégrale,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left(\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|\right)|g(t)|\,\mathrm{d}t = \sup_{s\in[a;b]} |f(s)| \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 8 : Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie

$$m = \inf_{s\in[a;b]} f(s) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M = \sup_{s\in[a;b]} f(s),$$

et est appelé la valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$. Ce réel étant entre les bornes atteintes par f et f étant continue par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists c \in [a;b]\,, \qquad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

appelé identité de la valeur moyenne.

Proposition IV.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz - Hors programme)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b])^2$. Alors

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La démonstration est particulièrement élégante et classique pour mériter un petit détour. On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Par positivité de l'intégrale, on observe que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$. De plus par linéarité de l'intégrale,

$$P(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarque alors (les intégrales étant des réels fixés) que P est un polynômes du second degré et puisque P est positif sur $\mathbb{R}$ tout entier, on en déduit nécessairement que son discriminant est négatif :

$$0 \geqslant \Delta = 4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 9 : Extension aux bornes inversées. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sont deux réels tels que $a < b$, alors on définit $\int_b^a f$ par

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $a = b$ on étend également la définition de l'intégrale par

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Alors les résultats suivants peuvent s'étendre à ces nouvelles notations :

- linéarité de l'intégrale,
- séparation (avec $a \neq b$),
- relation de Chasles.

Cependant les résultats suivants sont faux lorsque les bornes ne sont pas dans l'ordre :

- positivité/croissance de l'intégrale,
- toutes les inégalités.

Définition IV.4

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{C})$ une fonction à valeurs complexes. Alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on définit alors l'intégrale de f sur $[a;b]$ par

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 10 : Alors les résultats suivants peuvent s'étendre aux fonctions complexes :

- linéarité de l'intégrale,
- relation de Chasles,
- toutes les inégalités en remplaçant les valeurs absolues par le module !

Cependant les résultats suivants sont faux lorsque f est complexe :

- séparation/positivité/croissance de l'intégrale (l'ordre $\leqslant$ n'a pas de sens pour les fonctions non réelles).

V Théorème Fondamental de l'Analyse

Rappels

1. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur un intervalle I si et seulement si F est dérivable et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
2. Si F et G sont deux primitives de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.
3. Si $a \in I$ et $A \in \mathbb{R}$, alors il existe au plus une primitive F de f sur I telle que $F(a) = A$.

Théorème V.1 (Existence d'une primitive)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I)$. Alors pour tout $A \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} F \quad : \quad & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f telle que $F(a) = A$.

Démonstration. Puisque f est continue sur I, pour tout $x \in I$, f est continue sur $[a;x]$ et donc l'intégrale de f sur $[a;x]$ est bien définie (que x soit plus petit ou plus grand que a) et donc F est une fonction bien définie sur I. L'unicité est garantie par le rappel précédent et par définition de l'intégrale, on a bien

$$F(a) = A + \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = A + 0 = A.$$

Il nous faut donc montrer que F est une fonction dérivable sur I et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.
Echauffement. Montrons pour commencer que F est continue sur I. Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est continue en x_0 i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap I, \qquad |F(x) - F(x_0)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Pour tout $x \in I$, on a par définition de F, puis la relation de Chasles,

$$F(x) - F(x_0) = A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \left(A + \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc, si $x \geqslant x_0$, par l'inégalité triangulaire,

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{s \in [x_0;x]} |f(s)|\,(x - x_0)\,.$$

Notamment pour tout $x \in [x_0; x_0+1] \cap I$,

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \sup_{s \in [x_0;x_0+1]\cap I} |f(s)|\,(x - x_0)\,.$$

De même, pour tout $x \in [x_0 - 1; x_0] \cap I$,

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \sup_{s \in [x_0-1;x_0]\cap I} |f(s)|\,(x_0 - x)\,.$$

En résumé, pour tout $x \in [x_0 - 1; x_0 + 1] \cap I$, en notant $M = \sup_{s\in[x_0-1;x_0+1]\cap I} |f(s)|$, on obtient

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant M\,|x - x_0|\,.$$

Autrement dit, F est M-lipschitzienne sur $[x_0 - 1; x_0 + 1] \cap I$ notamment continue : pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$, on obtient bien que pour tout $x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta]$, $|x - x_0| \leqslant \eta$, on a

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant M\eta \leqslant \varepsilon\,.$$

Donc F est continue en x_0. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, on en déduit que F est continue sur I.
La vraie démonstration. Montrons maintenant que F est dérivable sur I et que pour tout $x_0 \in I$, $F'(x_0) = f(x_0)$. Fixons $x_0 \in I$ et posons pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$g(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\,.$$

Montrons que $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. On a pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{x-x_0}\left(F(x)-F\left(x_0\right)\right)-f\left(x_0\right)\times 1 \\
&= \frac{1}{x-x_0}\left(A+\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - A - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f\left(x_0\right)\times\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x 1\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f\left(x_0\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \left(f(t)-f\left(x_0\right)\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or f est continue sur I donc en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in [x_0-\eta; x_0+\eta] \cap I$, on a $|f(t)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Donc pour tout $x \in [x_0; x_0+\eta] \cap I$, si $t \in [x_0; x]$ alors $t \in [x_0-\eta; x_0+\eta] \cap I$ et donc par l'inégalité triangulaire,

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x |f(t)-f\left(x_0\right)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon\,.$$

De même si $x \in [x_0-\eta; x_0] \cap I$, en alternant les bornes, on montre à nouveau que $|g(x)| \leqslant \varepsilon$. De cette façon,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [x_0-\eta; x_0+\eta] \cap I, \qquad |g(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Autrement dit, par définition même de la limite,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, on obtient alors que pour tout $x_0 \in I$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F\left(x_0\right)}{x-x_0} = f\left(x_0\right).$$

Conclusion, F est dérivable en x_0 et $F'\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)$ c'est bien ce qu'il nous restait à montrer.

□

Remarque 11 : Puisque la dérivée de F est f et que f est continue sur I, on en déduit que F est $\mathscr{C}^1$ sur I.

Théorème V.2 (Théorème Fondamental de l'Analyse)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}\left([a;b]\right)$ et F UNE primitive de f sur $[a;b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a).$$

Démonstration. Si F UNE primitive de f sur $[a;b]$. Puisque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une autre primitive de f sur $[a;b]$ (d'après le théorème précédent), on en déduit donc d'après le rappel précédent, qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [a;b]$, $F(x) = A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Donc,

$$F(b)-F(a) = A + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \left(A + \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Corollaire V.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^1\left(I\right)$ alors pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Il est très important de spécifier f $\mathscr{C}^1$ pour que f' soit continue et que donc l'intégrale de f sur $[a;b] \subseteq I$ soit bien définie. Dans ce cas, f est bien une primitive de f' sur $[a;b]$ et donc par le théorème précédent,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Exemple 12 : Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

VI Sommes de Riemann

La méthode des rectangles et l'approximation de l'intégrale par une subdivision régulière est un cas particulier de l'approche de l'intégrale de f par des fonctions en escalier. Cependant, à l'image du théorème de comparaison série-intégrale du chapitre précédent, ce lien entre somme et intégrale est utile, notamment pour calculer/approcher des sommes à l'aide d'intégrales.

Théorème VI.1 (Somme de Riemann)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$S_n^{(1)}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n^{(2)}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{(1)}(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n^{(2)}(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus,

$$S_n^{(1)}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n^{(2)}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarque 13 : La notation $S_n^{(1)}(f)$ ou $S_n^{(2)}(f)$ n'est pas standard mais le terme *somme de Riemann* si. Attention à ne pas confondre les *sommes* de Riemann avec les *séries* de Riemann !

Démonstration. La démonstration dans le cas générale d'une fonction continue est hors programme et admise. Montrons le résultat lorsque f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Lorsque f est $\mathscr{C}^1([a;b])$ alors f' est continue sur le segment $[a;b]$ et donc f' est bornée sur $[a;b]$. Notons $M = \sup_{z\in[a;b]} |f'(z)|$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\forall (x;y) \in [a;b]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{z\in[x;y]} |f'(z)|\,|x-y| \leqslant M\,|x-y|,$$

i.e. f est M-lipschitzienne sur $[a;b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ les éléments de la subdivision régulière d'ordre n de $[a;b]$. Par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

Notons que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1 \,\mathrm{d}t = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_k) \frac{b-a}{n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est M-lipschitzienne,

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f) \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} M\,|t - x_k|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} x_{k+1} - x_k\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{b-a}{n}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t = M \frac{b-a}{n} \int_a^b 1\,\mathrm{d}t = M \frac{(b-a)^2}{n}\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $M(b-a)^2$ ne dépendant pas de n, on en déduit bien que

$$S_n^{(1)}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

En particulier, $S_n^{(1)}(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On procède de même pour $S_n^{(2)}(f)$.

□

Exemple 14 : Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k},$$

converge et calculer sa limite.

Remarque 15 : Attention ! ! ! Les sommes de Riemann ne sont pas des séries car on divise chaque somme « partielle » par la variable n qui est... variable !

VII Formules de Taylor

Rappel (Taylor-Young)

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ on a

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).\end{aligned}$$

Théorème VII.1 (Formule de Taylor-Reste intégral - Hors programme)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ et $(a,b) \in I^2$. Alors,

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n. On fixe I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$ deux réels de I. On considère alors $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$\mathscr{P}_n \qquad \text{« } \forall f \in \mathscr{C}^{n+1}(I),\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \text{ »}$$

Initialisation. Si $n = 0$ alors $\mathscr{P}_0$ s'écrit

$$\forall f \in \mathscr{C}^1(I), \qquad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc par le corollaire du théorème fondamental de l'analyse, on en déduit bien que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I)$. Notamment f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Donc par hypothèse de récurrence, on sait que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (\bigstar)$$

Posons

$$\forall t \in [a;b], \qquad u(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puisque f est $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I, $f^{(n+1)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur I et donc u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur I et donc sur $[a;b]$. De plus

$$\forall t \in [a;b], \qquad u'(t) = f^{(n+2)}(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}.$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(a)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} - 0 + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On note que $(b-b)^{n+1}$ vaut bien 0 car $n+1 \geqslant 1$. En injectant cette formule dans $(\bigstar)$, on obtient alors que

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f^{(n+1)}(a)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} - 0 + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

et $\mathscr{P}_{n+1}$ est alors démontrée.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.

□

Remarque 16 :

- La formule de Taylor avec reste intégral est plus précise que la formule de Taylor-Young car le reste est donné de façon explicite mais elle demande en contrepartie une régularité plus forte sur f.
- L'hypothèse $\mathscr{C}^{n+1}$ est nécessaire pour que $f^{(n+1)}$ soit continue et donc pour que l'intégrale existe.

Théorème VII.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \sup_{z\in[a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. Supposons $a < b$. Alors par le théorème de Taylor avec reste intégral,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| = \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right|.$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t$$

La fonction f étant $\mathscr{C}^{n+1}$, on en déduit que $f^{(n+1)}$ est continue sur **le segment** $[a;b]$. La fonction $f^{(n+1)}$ est donc continue et atteint ses bornes. Notons $M = \sup_{z\in[a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right|$. Par croissance de l'intégrale,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} M\,\mathrm{d}t = M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = M \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=a}^{t=b} = M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le cas où $b < a$ se traite de façon similaire en pensant bien à échanger les bornes de l'intégrale lorsque l'on utilise l'inégalité triangulaire.

$\square$

Henri LEBESGUE *(Beauvais 1875 - Paris 1941) est un mathématicien français fils d'un ouvrier typographe. Celui-ci meurt de la tuberculose alors que Lebesgue n'a que trois ans. Sa mère doit faire des ménages pour subvenir aux besoins de la famille. Brillant élève dès l'école élémentaire, Lebesgue intègre l'Ecole Normale Supérieure et y suit avec passion les cours d'Emile BOREL qui aura une très forte influence sur les travaux de Lebesgue et avec qui Lebesgue se liera d'amitié. Après une thèse à Nancy, Lebesgue obtient un poste à l'Université de Rennes jusqu'en 1906 avant d'enseigner à Poitiers puis d'être nommé en 1912 au Collège de France. Il est par la suite élu à l'Académie des Sciences en 1922. L'oeuvre de Lebesgue est centré sur la théorie de l'intégration. Il propose dans sa thèse une nouvelle construction fondée sur les tribus boréliennes qui étend et généralise profondément l'intégrale de Riemann (qui ne marche que pour des fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité doit être raisonnable).*
Cette théorie de l'intégration et de la mesure clôt pratiquement le débat sur la définition de l'intégrale et aura d'immenses répercutions en ouvrant la voie à l'intégration abstraite et à la théorie des probabilités.

Bien que fréquentant les milieux cultivés de son époque, Lebesgue reste candide et pas toujours à l'aise dans le grand monde. Un jour, au vestiaire du restaurant, il se trompe de manteau, s'en aperçoit peu après, le rapporte et s'excuse auprès du propriétaire. Celui-ci le toise avec mépris : « Vous auriez bien pu voir le ruban de la Légion d'Honneur ! ». Lebesgue ne réplique rien et chacun s'en retourne avec son propre manteau. Il faut pourtant savoir que Lebesgue était lui aussi à l'époque légionnaire...

Henri Lebesgue à l'âge de dix ans résout le premier dans sa classe l'exercice donné et l'amène à son instituteur. Celui-ci regarde et lui répond : « Ce n'est pas ça. Recommence ! ». Henri retourne à sa place, recommence et retrouve le même résultat. Il l'apporte à nouveau et n'obtient pour tout réponse : « Mais non, fais attention ! ». Le maître sort quelques instants et Henri en profite pour jeter un coup d'oeil sur le livre du maître, où il décèle une erreur dans la correction...

Voici une citation de Paul Montel, un autre mathématicien. Il décrit de façon élogieuse les dernier cours d'Henri Lebesgue alors que ce dernier est déjà souffrant.

« Au début de 1941, Henri Lebesgue donna au Collège de France son dernier enseignement annuel. [...] À ses yeux cela signifiait faire son devoir, discipline plus nécessaire que jamais pour ceux qui, comme lui, avaient foi dans la libération et le relèvement de la Patrie. »

Un mathématicien discute avec un ami issu d'une école de management. Sidéré par la différence de salaire, son ami lui propose « Tu sais notre boite embauche. Mais elle se méfie des personnes trop cérébrales, donc tu devras cacher que tu es mathématicien ». Le mathématicien suit son conseil et se met en effet à gagner beaucoup d'argent. Le boîte en question décide cependant de relever le niveau de ses employés et les envoie en cours élémentaire de mathématiques. Le premier jour on demande au mathématicien d'écrire au tableau la formule donnant l'aire d'un cercle. Celui-ci ne s'en souvient plus. Il essaye alors de la retrouver par le calcul d'une intégrale double en coordonnées polaires. Malheureusement, il se trompe et obtient un résultat négatif. Il recommence le calcul une deuxième fois puis une troisième fois et retombe toujours sur le même résultat négatif. Stressé, il se retourne vers la classe et entend tous ses camarades prétendument non-mathématiciens souffler : « Inverse les bornes d'intégration ! Inverse les bornes d'intégrations ! ».