Fiche de révisions : dénombrement

I Le cours

1. Enoncer le théorème fondamental de l'arithmétique.
2. Enoncer le théorème de la division euclidienne pour les entiers.
3. Définir le PGCD et le PPCM.
4. Définir $a \equiv b \ [n]$.
5. Définir un nombre premier.
6. Caractériser les bijections sur les ensembles finis.
7. Donner le lien entre les cardinaux d'ensembles et les caractères injectifs, bijectifs et surjectifs.
8. Enoncer la formule de Poincaré. Cas de l'union disjointe ?
9. On tire successivement et avec remise p éléments parmi n. Qu'obtient-on ? Combien de tirages sont possibles ?
10. On tire successivement et sans remise p éléments parmi n. Qu'obtient-on ? Combien de tirages sont possibles ?
11. On tire simultanément p éléments parmi n. Qu'obtient-on ? Combien de tirages sont possibles ?
12. Donner le nombre d'applications de E dans F. Combien sont injectives ? bijectives ?
13. Donner la notation pour l'ensemble des parties d'un ensemble. Lorsque E est fini en donner son cardinal.

II Les savoir-faire

1. Modéliser un énoncé contextualisé en définissant des ensembles et en calculant leurs cardinaux.
2. Savoir utiliser la formule de Poincaré.
3. Savoir découper un ensemble en une union disjointes d'ensembles.
4. Penser à passer au complémentaire.
5. Reconnaître un type de tirage, distinguer les différents tirages.
6. Savoir découper une situation en une succession de tirages.

III Les erreurs à éviter

1. Le cardinal de l'union n'est pas en général la somme des cardinaux (cf la formule de Poincaré).
2. Bien justifier ses réponses : cela ne peut-être juste une formule, il faut l'expliquer en français. Au contraire ne pas rester trop vaguement verbeux, lorsque cela est possible, définir proprement des ensembles, bien faire référence aux arrangements, p-uplets, combinaisons.
3. Eviter de compter plusieurs fois la même issue (cela peut être subtil).

IV Les réponses du cours

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ un entier, $p_1, \ldots, p_d$ des nombres premiers, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in (\mathbb{N}^*)^d$ des entiers naturels non nuls tels que
$$n = \prod_{i=1}^{d} p_i^{\alpha_i}.$$
De plus cette décomposition est unique.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que
$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < b.$$
3. Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, alors le $PGCD(a, b)$ est le plus grand des entiers qui divisent a et b. Le $PPCM(a, b)$ et le plus petit des entiers multiples de a et de b.
4. Soient $(a, b, n) \in \mathbb{Z}^3$, on a $a \equiv b \ [n]$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + kn$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. On dit que p est premier si et seulement si p est divisible uniquement par 1 et par p (dans les entiers naturels).
6. Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $\varphi \in \mathscr{F}(E, F)$. Alors
$$\varphi \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est surjective.}$$
7. Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.
   - Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
   - Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.
   - Si f est bijective, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
8. Soient E un ensemble fini et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ deux parties de E. Alors
$$\mathrm{Card}(A \cup B) + \mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$
En particulier si A et B sont disjoints alors
$$\mathrm{Card}(A \sqcup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$
9. - Tirer successivement et avec remise p éléments parmi n correspond à la construction d'un p-uplet. Le nombre de tirages possibles vaut n^p.
   - Tirer successivement et sans remise p éléments parmi n correspond à la construction d'un arrangement. Le nombre de tirages possibles vaut $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
   - Tirer simultanément p éléments parmi n correspond à la construction d'une combinaison. Le nombre de tirages possibles vaut $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
   - Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux $n = \mathrm{Card}(E)$ et $p = \mathrm{Card}(F)$. Le nombre d'application de E dans F correspond à un tirage successif avec remise :
   $$\mathrm{Card}(\mathscr{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)} = p^n.$$
   Si l'on souhaite une application injective, on doit effectuer un tirage successif sans remise. Le nombre d'applications de E dans F injectives est donc
   $$\mathrm{Card}(\mathscr{I}(E, F)) = A_p^n = \frac{p!}{(p-n)!}.$$
   Le nombre d'applications bijectives est 0 si $p \neq n$ et (nombre de permutations) $n!$ si $p = n$.
10. Soit E un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$ et son cardinal est
$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n.$$