Fiche de révisions : intégration

I Le cours

1. Définir une fonction en escalier.
2. Enoncer le théorème de Weierstrass.
3. Enoncer la croissance de l'intégrale.
4. Enoncer la propriété de séparation de l'intégrale.
5. Enoncer l'inégalité triangulaire.
6. Enoncer l'inégalité de la moyenne.
7. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz
8. Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
9. Enoncer le théorème des sommes de Riemann.
10. Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

II Les savoir-faire

1. Révisions du chapitre 8 (justifier qu'une intégrale existe, savoir reconnaître une primitive, faire une IPP, faire un changement de variable, intégrer l'inverse d'un trinôme).
2. Savoir reconnaitre une somme de Riemann.
3. Utiliser la croissance ou la positivité de l'intégrale pour la majorer, la minorer.
4. Manipuler des suites d'intégrales (monotonie, bornitude, relation de récurrence par une IPP par exemple).
5. Déterminer la limite d'une intégrale à paramètre par le théorème d'encadrement en particulier.
6. Savoir appliquer le théorème fondamental de l'analyse.
7. Savoir gérer des intégrales dont les bornes et/ou la fonction à intégrée dépendent d'un paramètre.

III Les erreurs à éviter

1. Ne jamais échanger limite et intégrale $\lim \int \neq \int \lim$ (le faire au brouillon pour avoir une idée du résultat mais ne jamais croire que ce résultat est toujours vrai).
2. Les fonctions du type $x \mapsto \int_1^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \mapsto \int_1^x f(xt)\,\mathrm{d}t$; $x \mapsto x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $x \mapsto \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ par exemple ne sont pas des primitives de f !

IV Les réponses du cours

1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $\varphi \in \mathscr{F}([a;b], \mathbb{R})$. On dit que φ est une fonction en escalier si et seulement s'il existe $(x_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$, $n \in \mathbb{N}^*$, une subdivision de $[a;b]$ et $(C_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ tel que

$$\forall i \in [\![0; n-1]\!],\ \forall t \in]x_i; x_{i+1}[, \qquad \varphi(t) = C_i.$$

On rappelle que $(x_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ *est une subdivision de* $[a;b]$ *si et seulement si* $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.

2. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi_\varepsilon \in \mathscr{E}([a;b]),\ \forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon.$$

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **avec les bornes dans le bon sens :** $a < b$. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})^2$ tel que $f \leqslant g$ i.e. $\forall t \in [a;b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Alors,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Si
   - f est positive sur $[a;b]$
   - d'intégrale nulle : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

   Alors $f = 0$ i.e. $\forall t \in [a;b]$, $f(t) = 0$.

5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **avec les bornes dans le bon sens :** $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{K})$ alors,

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **avec les bornes dans le bon sens :** $a < b$. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})^2$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \max_{t \in [a;b]} |f(t)| \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

7. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **avec les bornes dans le bon sens :** $a < b$. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})^2$. Alors,

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)^2 \int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

8. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $a \in I$ et $A \in \mathbb{K}$. Alors la fonction

$$F : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$

existe, est UNE primitive de f sur I et donc $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F(a) = A$.

9. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{K})$. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

10. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a;b], \mathbb{K})$. Alors,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \sup_{z \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$